1/7 (火) 微積分II 第23回

◎ 復習

- 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、
  I の各点 x において $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が収束するとき、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束すると言い、
  $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定まる関数 f を $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数という。

- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束するとしよう。このとき、さらに、
  $$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N} : 「n \geq N \text{ かつ } x \in I」 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
  がみたされるとき、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 I において
  f に一様収束するといい、$f_n \rightrightarrows f \ (n \to \infty)$ と表す。

◎ 定理 6.10 (2) p.242

(極限関数 $f(x)$ が分からなくても一様収束が判定できる)

区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の (a) と (b) は同値である。

(a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I において一様収束する。

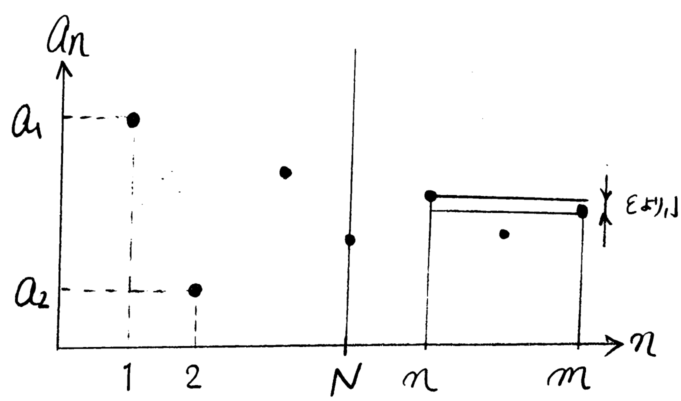
(b) $^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N} : 「m > n \geq N \text{ かつ } x \in I」 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

- 復習 (実数の完備性)

  実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、
  これが収束することと、コーシー列であることは同値である。

  - コーシー列の復習
    $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとは、
    $^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$
    であること。

    (だんだんまっすぐになる)



@ 定理 6.10 (2) の証明

o (a) $\Rightarrow$ (b) の証明

- $f_n \rightrightarrows f \ (n \to \infty)$ とする。
- 正の数 ε を任意にとる。① このとき、

一様収束の定義から こういう N がとれる (存在する)

$\exists N \in \mathbb{N}$:「$n \geq N$ かつ $x \in I$」$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ である。 ―― (*)

- このNについて、② $m > n \geq N$ かつ $x \in I$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&|f_m(x) - f_n(x)| \\
&= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\
&\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\
&= |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

三角不等式 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ m, n \geq N \\ \bullet\ x \in I \\ \bullet\ (*) \end{array} \right\}$ より。

- よって、「$m > n \geq N$ かつ $x \in I$」$\Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ③

つまり、(b) が成り立つ。

○ (b) → (a) の証明

○ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が各点収束していることを示そう。

- I の点 α を任意にとる。このとき (b) より、
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| < \varepsilon$ である。
- よって、数列 $\{f_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である。
  したがって $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha)$ は収束する。（実数の完備性より証明される）

○ 以上より、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束する。
この極限関数を f とする。$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I において一様収束することを示そう。

- 正の数 ε を任意にとる。①
  (b) より、「$m > n \geq N$ かつ $x \in I$」$\Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ である。——(＊＊)
- このNについて、② $n \geq N$ かつ $x \in I$ とする。
  このとき (＊＊) より、n より大きいすべての自然数 m について
  $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。
  よって、$m \to \infty$ とすれば、$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ である。
- したがって、「$n \geq N$ かつ $x \in I$」$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ③
  つまり、$f_n \rightrightarrows f\ (n \to \infty)$ である。

○ 補足

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとき、「$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < \beta$」$\Rightarrow \alpha < \beta$ は偽である。

（反例）　$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ について

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 1$ だが、$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$　$\cancel{\left(\lim_{n\to\infty} a_n < 1\right)}$

ただし、

「$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < \beta$」$\Rightarrow \alpha \leq \beta$ は真である。

◎ 定理 6.11 (1) p.242

区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、
各 f_n は I において連続で、$f_n \rightrightarrows f \ (n \to \infty)$ であるとする。
このとき f は I において連続である。

定義 → I の各点において連続

定義 → $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

○ 証明

- a を I の（任意の）点とする。
- 正の数 ε を任意にとる。 ①
- $f_n \rightrightarrows f \ (n \to \infty)$ より、

  $\exists N \in \mathbb{N}$:「$n \geq N$ かつ $x \in I$」$\Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ —— (*)
- この N について f_N は I において連続である。よって、

  $\exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow \left| f_N(x) - f_N(a) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ —— (**)
- この δ について ② $|x-a| < \delta$ のとき、

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3}^{(*)} + \frac{\varepsilon}{3}^{(**)} + \frac{\varepsilon}{3}^{(*)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

- したがって、$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である。 ③

  よって f は点 a において連続である。

  点 a は I の任意の点だから、f は I において連続である。