12/26 力学2 第11回

Q 小テスト（一様な球体の慣性モーメント）

- 半径 a，質量 M の一様な球体の重心のまわりの慣性モーメント

$$I_{CM} = I_{zz} = \int dV \rho (x^2+y^2)$$ を求めよ。

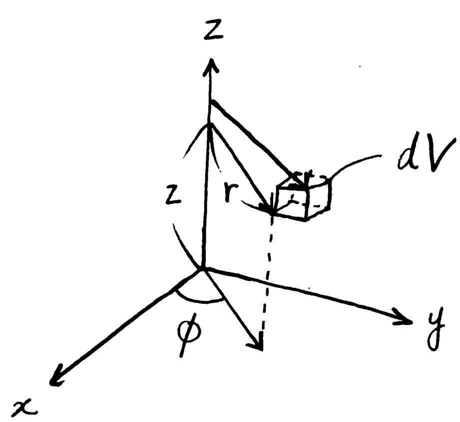
円柱座標を用いて積分を実行するのが良い。

- 慣性乗積 $I_{xy} = -\int_{球} dV \rho xy = 0$
- 慣性モーメント

$$I_{zz} = I_{yy} = I_{xx} = \int dV \rho (x^2+y^2), \qquad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

- 円柱座標系

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$



- $dV = dr \cdot r d\phi \cdot dz$?

- $$I_{zz} = \rho \int_{-a}^{a} dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dr \cdot r \cdot r^2 \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi\rho \cdot \int_{-a}^{a} dz \cdot \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2-z^2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-a}^{a} dz\, (a^2-z^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-a}^{a} dz\, (a^4 - 2a^2z^2 + z^4)$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \left[a^4 z - 2a^2 \cdot \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \left\{ a^4 \cdot 2a - \frac{2}{3}a^2 \cdot (a^3 - (-a)^3) + \frac{1}{5}(a^5 - (-a)^5) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \left\{ 2a^5 - \frac{4}{3}a^5 + \frac{2}{5}a^5 \right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\pi\rho \cdot \frac{\overset{8}{\cancel{30-20+6}}}{15} a^5$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \cancel{\pi} \overset{a^2}{\cancel{a^5}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{M}{\cancel{\pi}\cancel{a^3}}$$

$$= \frac{2}{5} M a^2$$

② 力積とビリヤード

○ 力積

力を時間で積分したもの

$\int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{F}(t)$ ベクトル

ごく短時間のみ働く力の解析に有効。

cf. 仕事

力を経路で積分したもの

$W = \int_A^B d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x})$ スカラー

○ ある剛体に外力 $\vec{F}^{ext}$ が短時間 $\Delta t = t_1 - t_0$ の間作用したとする。

• 運動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{ext} \end{cases}$$

短時間 Δt のみ作用

• 運動方程式の解 ← 両辺積分 $\int_{t_0}^{t_1} dt$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{F}^{ext}_{(t)}$$

力積

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{N}^{ext}_{(t)}$$

角力積

• 剛体の対称軸のまわりの回転運動

↓

z軸と呼ぶと、慣性乗積 $I_{zx} = I_{zy} = 0$

$$\Delta\vec{L}_z = I_{zz}\omega_z = I_{zz}\{\omega_z(t_1) - \omega_z(t_0)\}$$

?

② ビリヤードの球をキューで突く

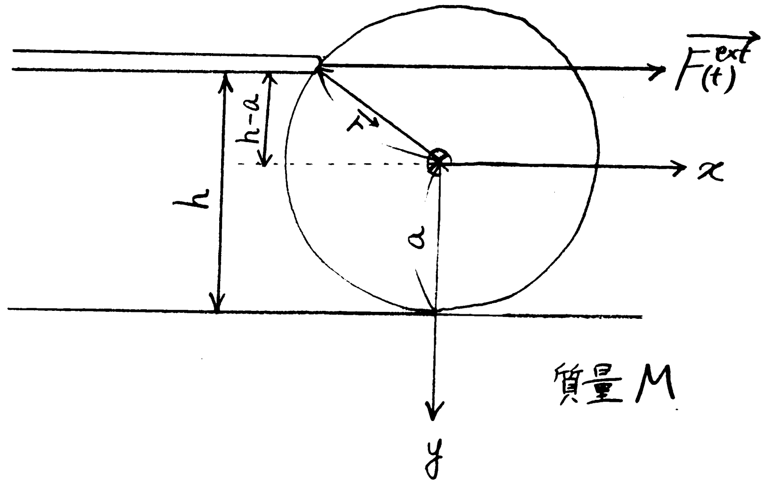
○ キューで球の正面正中を突く

$$\overrightarrow{F^{ext}} = F_x \overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{N^{ext}} = \vec{r} \times \overrightarrow{F^{ext}}$$

$$= r F_x \sin\theta \, \overrightarrow{e_z}$$

$$= (h-a) F_x \overrightarrow{e_z}$$

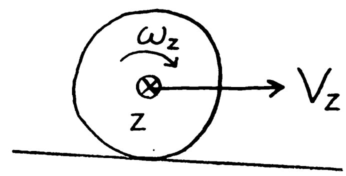


○ 球は初めは静止していた

• 重心運動 !

$\Delta\vec{p} \longrightarrow x$成分のみ

$$\Delta p_x = M\Delta V_x = MV_x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, F_x(t)$$



• 回転運動 !

$$\Delta L_z = I_{zz}\Delta\omega_z = I_{zz}\omega_z(t_1)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt\, N_z(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(h-a)F_x(t) = (h-a)\int_{t_0}^{t_1} dt\, F_x(t)$$

? !

• $\Delta p_y = \Delta p_z = 0$

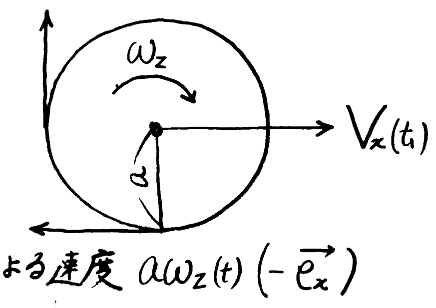
$\Delta L_x = \Delta L_y = 0$?

$$I_{zz} = \frac{2}{5}Ma^2$$

重心の速度と角速度の間に関係なく（力の詳細に依らず）

$$\omega_z(t_1) = \frac{h-a}{I_{zz}} MV_x(t_1) = \frac{5}{2}\cdot\frac{h-a}{a^2}V_x(t_1)$$!

- 接地面における速度

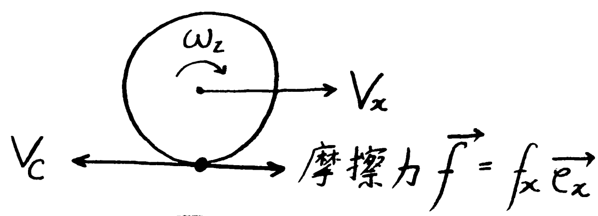


$$
\begin{aligned}
V_c &= V_x(t_1) - a\omega_z(t_1) \\
&= \left(1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{h-a}{a}\right) V_x(t_1) \\
&= \frac{7a - 5h}{2a} V_x(t_1)
\end{aligned}
$$

- 球がすべらずに転がる $\Longleftrightarrow$ $V_c = 0$

  $\therefore$ キューで突くべき位置 $h = \frac{7}{5}a$

○ $h > \frac{7}{5}a$ を突く (high shot)



- $V_c < 0$ ($V_x(t_1)$ と逆向き)
- $M\frac{dV_x}{dt} = f_x$: $\vec{f}$ によって V_x は増大　　f_x かな?

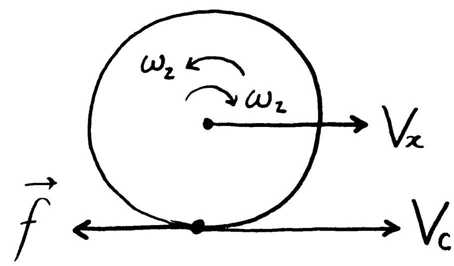
  力のモーメント $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f} = -af\vec{e_z}$: $\vec{f}$ によって ω_z は減少

  最終的に $V_c = 0$ ($\Longleftrightarrow \vec{f} = 0$) の転がり運動。

むしろこっちを f に直した方が楽だな

○ $h < \frac{7}{5}a$ を突く (low shot)

- $V_c > 0$ ($V_x(t_1)$ と同じ向き)

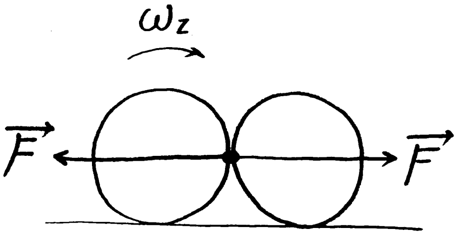


  $M\frac{dV_x}{dt} = -f$: V_x は減少

  $I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} = N_z = af$: ω_z は増大

  最終的に $V_c = 0$.

○ 球同士の衝突



- 手球が、静止している的球に正面衝突する。

  力 $\vec{F}$ が短時間作用

  $$\begin{cases} \vec{F} \text{による力のモーメント } \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \\ \text{球の間の摩擦力は無視} \end{cases}$$

  $\therefore N = 0$

- $\begin{cases} \vec{F} \text{ が } \Delta t \text{ 作用} & : \text{それぞれの球の } \vec{p} \text{ は変化する} \\ \vec{N} = 0 & : \quad 〃 \quad \text{回転は変化しない。} \end{cases}$

- 2個の球をまとめた系には外力が働かない。

  $$\begin{cases} \text{全運動量} & \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \\ \text{全エネルギー} & T = T_1 + T_2 \end{cases} \quad \text{保存}$$