◎ 一様収束（つづき）

○ <u>定義</u> (p.241)

(1) 区間 I において定められた関数 $f_1, f_2, f_3, \dots$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を<u>I 上の関数列</u>という。

(2) I の各点 x において $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が収束するとき、関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I において各点収束するという。さらに、このとき、$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定まる関数 f を $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の<u>極限関数</u>といい、$f_n \to f \ (n\to\infty)$ と表す。

○ <u>例</u> 前回の例

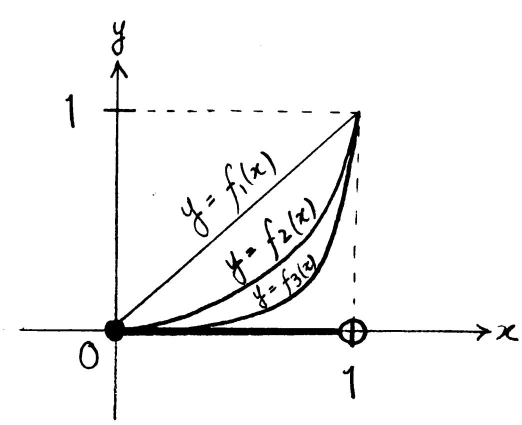
$$f(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \le x \le \frac{1}{n}\right) \\ 2n - n^2 x & \left(\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

で定まる関数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ は、区間 $I = [0,1]$ において定数関数 $f(x) = 0$ に各点収束する。

○ <u>例</u> $I = [0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $f_n = x^n$ で定める。

このとき、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ なので、

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ に各点収束する。



× 一様収束

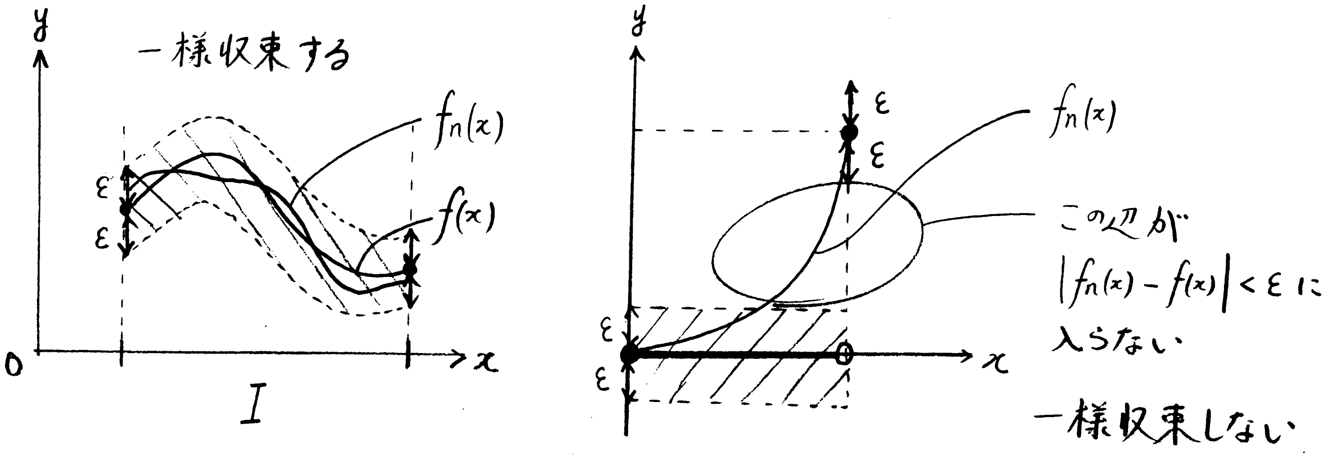
○ 定義 (p.241)

区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I において関数 f に一様収束するとは、

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N} : \left(「n \geq N \text{ かつ } x \in I」 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$

であるときにいう。

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束するとき、$f_n \rightrightarrows f\ (n \to \infty)$ と書く。



☆ $f_n \rightrightarrows f\ (n \to \infty)$ ならば、$f_n \to f\ (n \to \infty)$ である。

（一様収束する関数列は各点収束する）

逆は（一般には）正しくない。

○ <u>例</u> （問6.5 (2) p. 244）

$f_n(x) = n^2 x^n (1-x)^n$ で定まる $I = [0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について考える。次のことを使う。

［・<u>命題</u>　$\alpha > 0$, $|r| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} n^\alpha r^n = 0$］

- $0 \leq x \leq 1$ のとき、$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ だから、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2 \{x(1-x)\}^n = 0$$

したがって、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I において定数関数 $f(x) = 0$ に各点収束する。

- $$f_n'(x) = n^2\left\{n x^{n-1}(1-x)^n + n(-1)x^n(1-x)^{n-1}\right\}$$

$$= n^3 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\{(1-x) - x\}$$

$$= n^3 x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$$

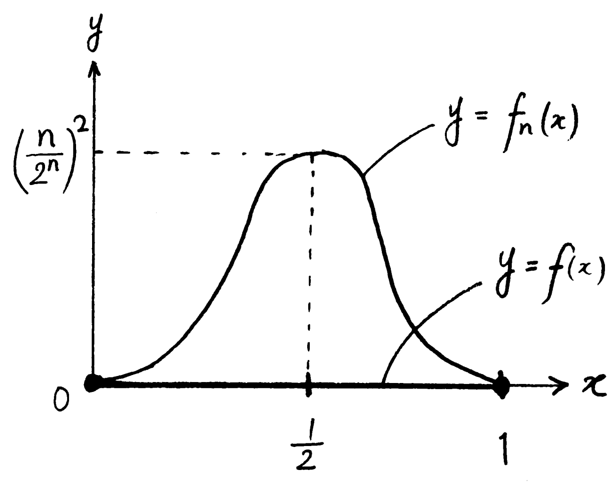
x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗		↘	0

$$f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = n^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$= n^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{n}{2^n}\right)^2$$

より、$f_n(x)$ のグラフは図のようになる。



- <u>正の数 ε を任意にとる。</u> 1

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left\{n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2 = 0$ なので、

$^\exists N \in \mathbb{N}$: $n \geq N \Rightarrow \left|\left(\frac{n}{2^n}\right)^2 - 0\right| < \varepsilon$

この行は N を定義しているのか。
N を直接等式や不等式で評価しなくていいの？

<u>この N について</u> 2

<u>$n \geq N$ かつ $x \in I$ のとき、$|f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{n}{2^n}\right)^2 < \varepsilon$</u> 3 となる。

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する。

- この例の考え方を一般的に述べる。

定理 6.10 (1) (p.242)

区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I において関数 f に一様収束することと、

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ は同値である。

- 命題　$\alpha > 0$, $|r| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} n^\alpha r^n = 0$ の証明
  - 春学期に（プリントで）証明した $\alpha > 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ を使う。
  - $r = 0$ のときは明らか

    $0 < |r| < 1$ のとき、

    $s = -\log|r|$ とおく。

    $s > 0$ であり、$|r| = e^{-s}$ である。

$$|n^\alpha r^n| = n^\alpha |r|^n = \frac{n^\alpha}{e^{sn}} = \frac{(sn)^\alpha}{e^{sn}} \cdot s^{-\alpha} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$\times s^\alpha s^{-\alpha}$

$s > 0$ なので
$n\to\infty$ のとき
$sn \to \infty$