12/18 (水) 微積分Ⅱ 第21回

◎ 定理5.19の公式の説明

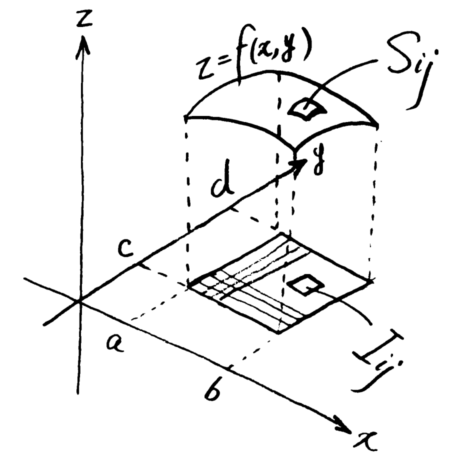
話を簡単にするために、Dが有界閉区間 $I = [a,b]\times[c,d]$ の場合を考える。

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ をとって

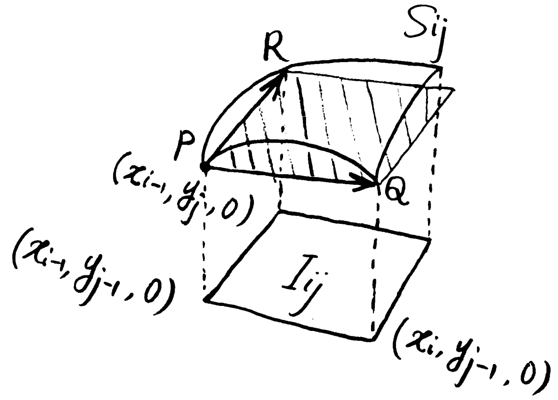
$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$ とおくと、

$\{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ は I の分割である。



点(x,y)がI_{ij}を動くときのグラフ $z=f(x,y)$ を S_{ij} とする。

S_{ij} を以下のように近似する。



$P = (x_{i-1}, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1}))$

$Q = (x_i, y_{j-1}, f(x_i, y_{j-1}))$

$R = (x_{i-1}, y_j, f(x_{i-1}, y_j))$ とおく。

このとき、S_{ij}の面積は、PQ, PRを隣り合う2辺とする平行四辺形の面積で近似できるだろう。

この平行四辺形の面積は $\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$ である。

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_i - x_{i-1} \\ 0 \\ f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_j - y_{j-1} \\ f(x_{i-1}, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \end{pmatrix}$$

ここで、fの1次近似式を使って、

$$f(x_i, y_{j-1}) = f(x_{i-1} + (x_i - x_{i-1}), y_{j-1})$$

$$\fallingdotseq f(x_{i-1}, y_{j-1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1})(x_i - x_{i-1})$$

よって、

$$\overrightarrow{PQ} \fallingdotseq (x_i - x_{i-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1}) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} \fallingdotseq (y_j - y_{j-1})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{j-1}) \end{pmatrix}$$

式を見やすくするために、$m_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1})$, $m_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{j-1})$ とおくと、

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 \fallingdotseq (x_i - x_{i-1})^2(1 + m_x^2)$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 \fallingdotseq (y_j - y_{j-1})^2(1 + m_y^2)$$

$$(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2 \fallingdotseq \left((x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})m_x m_y\right)^2$$

したがって S_{ij} の面積は、

$$\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \fallingdotseq (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\sqrt{1 + m_x^2 + m_y^2}$$ と近似される。

よって求める面積は、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{j-1})\right)^2}$$

で近似できる。これはリーマン和だから、分割を細かくする極限をとると、

$$\iint_I \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy$$ に収束する。

@ 例題 5.19 p. 223 球面の表面積

$a > 0$ として、半径 a の球面の表面積 S を求めよう。

$$f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq a^2 \right\}$$ とおくと、

$$S = 2\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$ である。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

よって、

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad (\because a > 0)$$ となるので、

$$S = 2a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

右辺の積分は広義積分である。

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ は非負なのでコンパクト近似列をとって計算すればよい。

正の整数 n に対し、$K_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq \left(a\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 \right\}$ とおく。

このとき、極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ すると、

$$\iint_{K_n} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{\sqrt{a^2-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

目の子で

$$= 2\pi \cdot \left[-\left(a^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 2\pi \cdot \left\{-\left(a^2-a^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + a\right\}$$

$$\longrightarrow 2\pi a \quad (n \to \infty)$$

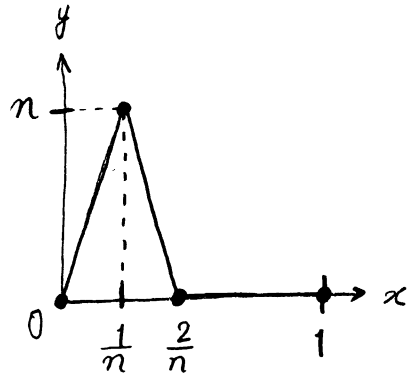
したがって、

$$S = 2a \cdot 2\pi a = 4\pi a^2$$

§6. 無限級数

◎ 一様収束

∘ 2以上の整数nに対し、閉区間$[0,1]$において連続な関数$f_n(x)$を次で定義する。



$$f(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 2n - n^2 x & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

∘ このとき、次の2つの極限を考える。

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\right) dx$$

∘ (1) I_1の計算

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 1$$

よって、$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

∘ (2) I_2の計算

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} f(x)$ を計算する。

• $x = 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

- $0 < x \leq 1$ のとき

  nが十分大きくなると $f_n(x) = 0$ である。

  よって $\lim_{n \to \infty} f(x) = 0$.

したがって、$0 \leq x \leq 1$ のとき $\lim_{n \to \infty} f(x) = 0$ なので、

$$I_2 = \int_0^1 0\, dx = 0$$

◦ 以上より、

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f(x) \right) dx$$

つまり、極限と積分の順序を交換できない。