12/17(火) 微積分Ⅱ 第20回

ⓐ ガンマ関数とベータ関数

○ 定義 p.116

(1) ガンマ関数 $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx \qquad (\alpha > 0)$

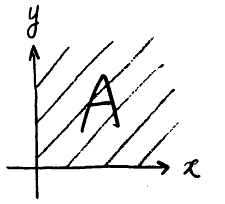
(2) ベータ関数 $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (p,q > 0)$

(右辺の広義積分は $\alpha > 0$, $p,q > 0$ のとき収束する)(p.116 を見よ)

○ 定理5.18 p.212

$p,q > 0$ のとき、$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ がなりたつ。

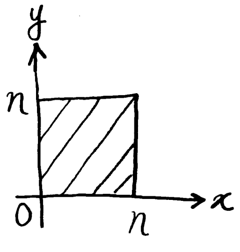
○ 証明



$A = [0,\infty) \times [0,\infty)$ に対し、次の広義積分

$$I = \iint_A x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

を2通りに計算する。



(1) 正の整数 n に対して、$K_n = [0,n] \times [0,n]$ と定めると、$\{K_n\}_{n=1}^\infty$ は A のコンパクト近似列である。

A において $x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}$ は非負だから、

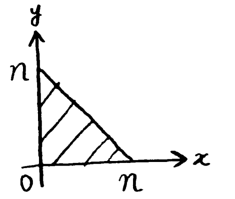
$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n x^{p-1} e^{-x}\,dy\right)\left(\int_0^n y^{q-1} e^{-y}\,dy\right)$$

$$= \Gamma(p)\Gamma(q)$$

(2) 正の整数 n に対し、$L_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq n\right\}$

と定めると、$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ もAのコンパクト近似列である。



$$I_n = \iint_{L_n} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\,dxdy$$ とおく。

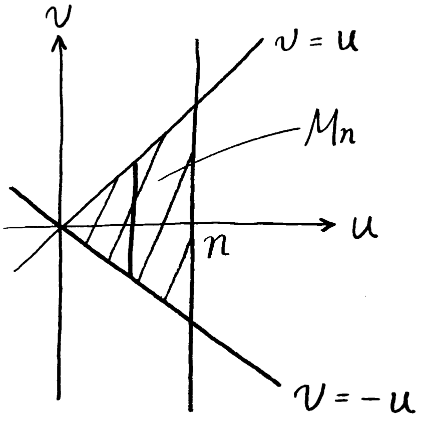
次の変数変換を行う。

$$u = x+y,\quad v = x-y \quad \left(\Leftrightarrow x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2}\right)$$

このとき L_n は、

$$M_n = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid -u\leq v\leq u,\ u\leq n\right\}$$ に1対1に移る。

ヤコビアンは、



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

よって、

$$I_n = \iint_{M_n}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{p-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)^{q-1}e^{-u}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^n\int_{-u}^{u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{p-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)^{q-1}e^{-u}\,dvdu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^n\left(\int_{-u}^{u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{p-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)^{q-1}dv\right)e^{-u}\,du$$

$v = (2t-1)u$ と変数変換すると、

$$\int_0^1 (tu)^{p-1}\left((1-t)u\right)^{q-1}2u\,dt$$

$$= 2u^{p+q-1}B(p,q)$$

したがって、

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^n 2u^{p+q-1} B(p,q) e^{-u} du$$

$$= B(p,q) \underline{\int_0^n u^{p+q-1} e^{-u} du}$$

よって、

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n$$

$$= B(p,q) \underline{\Gamma(p+q)}$$

以上より、

$$I = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

$$= B(p,q)\Gamma(p+q)$$

$p, q > 0$ のとき、$x > 0$ の範囲において、$x^{p+q-1}e^{-x} > 0$ だから、

$\Gamma(p+q) > 0$。特に $\Gamma(p+q) \neq 0$ なので、

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ⓐ 2変数関数のグラフが定める曲面の面積

- 曲面およびその面積の定義の詳細については省略し (p. 214〜220)、2変数関数のグラフが定める曲面の面積の公式を与える。

- <u>定理 5.19 (p.221)</u>

Dは$\mathbb{R}^2$の有界な閉領域で、
その境界∂Dは有限個のなめらかな曲線から成るものとする。
関数$f(x,y)$がDにおいてC^1級のとき、曲面$z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$の面積は、
$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ に等しい。

- <u>補足</u>

(1)「曲線」の定義.

連続な関数$\varphi(t), \psi(t)$ $(a\leq t\leq b)$に対し、xy平面において
$P=(\varphi(t), \psi(t))$と媒介変数表示される点Pの軌跡を<u>(連続な)曲線</u>という。
さらに、$\varphi(t), \psi(t)$が$[a,b]$においてC^1級で、$(\varphi'(t), \psi'(t))\neq(0,0)$
であるとき、<u>なめらかな曲線</u>であるという。

(2)「閉領域」の定義 (p.126)

$\mathbb{R}^n$の部分集合Dが<u>領域</u>であるとは、
Dが開集合で、Dの任意の2点がDに含まれる連続な曲線で結べる
ときにいう。
領域にその境界を合わせた集合を<u>閉領域</u>という。