12/12 力学2 第9回

Q 小テスト

4枚羽ブーメランを yz 平面にそって回転を加えつつ $-y$ 軸方向に投げた。

重心の速度 $\vec{V} = -V\vec{e_y}$

重心のまわりの角速度 $\vec{\omega} = \omega\vec{e_x}$

ブーメランの全質量 M

一枚の羽の長さ l

それぞれの羽は均一である。

1. 重心のまわりのブーメランの角運動量を求めよ。
2. 羽に働く揚力によって重心のまわりには力のモーメント $\vec{N} = \frac{4}{3}c\omega V l^3 \vec{e_y}$ が働く。この力のモーメントによる角運動量の歳差運動の角速度 ω_p を求めよ。
3. ブーメランの重心は半径 R の円運動を行う。この円運動の角速度を ω_0 とする。$\omega_0 = \omega_p$ より、R を求めよ。
4. ブーメランの重心に働く向心力 $\vec{F} = 4cl\left(\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right)\vec{e_x}\, t$ と、重心の円運動の遠心力がつり合うことから、V と ω の関係を求めよ。

1.
$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
&= \vec{r} \times m\vec{v} \\
&= 4\int_0^l dr\,\vec{r} \times \frac{M}{4l}(\vec{r}\times\vec{\omega}) \\
&= 4\int_0^l dr\,\frac{M}{4l}\,r^2\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{3}Ml^2\vec{\omega}
\end{aligned}
$$

?

2.
$$
\omega_p = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{L}|} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}c\cancel{\omega}Vl^{\cancel{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}M\cancel{l^2}\cancel{\omega}} = \frac{4cVl}{M}
$$

3. $V = \omega_0 R$ である。

$$\omega_0 = \frac{\cancel{V}}{R} = \omega_p = \frac{4c\cancel{V}\ell}{M} \qquad \therefore\ R = \frac{M}{4c\ell} \left(= \frac{\delta}{c} \right)$$

!

4. $$F = \cancel{4c\ell}\left(\frac{\omega^2\ell^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{MV^2}{R} = \cancel{4c\ell}\,V^2$$

重心の円運動の
遠心力

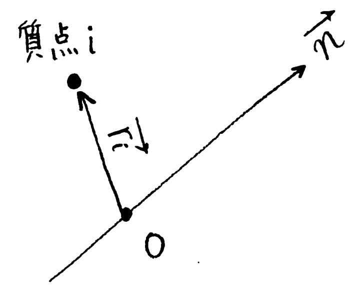
$$\therefore\ \frac{1}{3}\omega^2\ell^2 = \frac{1}{2}V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega\ell$$

② 慣性モーメントと慣性乗積

点Oを通る回転軸まわりの回転運動

- 回転軸 $\vec{n}$（単位ベクトル）
- 角速度ベクトル $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$



剛体を質量m_iの質点iの集合と見なす。
各質点の位置を$\vec{r_i}$とする。

- 回転運動による質点iの速度 $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$
- 点Oのまわりの剛体の角運動量

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i}$$

$$= \sum_i m_i \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i})$$

? $$L_j = \sum_i m_i \,\epsilon_{jkl} (r_i)_k \,\epsilon_{lmn}\, \omega_m (r_i)_n$$

$$\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ \omega_j (\vec{r_i} \cdot \vec{r_i}) - (r_i)_j (\vec{\omega} \cdot \vec{r_i}) \right\}$$

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{\omega} \sum_i m_i (\vec{r_i} \cdot \vec{r_i})}_{/\!/ \vec{\omega}} - \underbrace{\sum_i m_i \vec{r_i} (\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})}_{\not\parallel \vec{\omega}} \qquad \therefore \ \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$$

- 成分を書いてみる $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$, $\vec{r_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_i m_i x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)$$

$$= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i$$

$$L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i$$

$$L_z = -\omega_x \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \Longleftrightarrow L_j = \left(\sum_{k=1}^{3}\right) I_{jk} \omega_k \quad ?$$

← 慣性テンソル

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$ とすると、

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$$
$$I_{yx} = -\sum_i m_i y_i x_i, \quad I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$$
$$I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad I_{zy} = -\sum_i m_i z_i y_i, \quad I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

- I_{jj} ： 慣性モーメント
- $I_{jk} (j \neq k)$ ： 慣性乗積
- 行列 I ： 慣性テンソル

o 重心または固定点のまわりの回転運動の運動方程式

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega})$$

成分で書くと、$\frac{d}{dt}(I_{jk}\omega_k) = \frac{dL_j}{dt} = N_j$

o 回転運動の運動エネルギー

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v_i} \cdot \vec{v_i}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r_i})$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \epsilon_{jkl}\,\omega_k (r_i)_l (\vec{\omega} \times r_i)_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega_k \epsilon_{jkl} (r_i)_l (\vec{\omega} \times r_i)_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega} \cdot \left\{ \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k$$

?

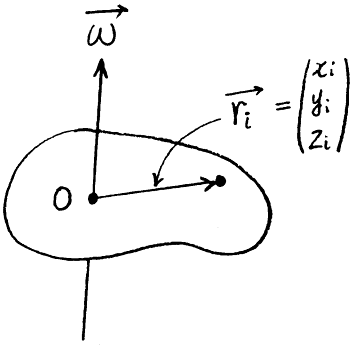
$m_i \left(\vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i})\right) = (\vec{L_i})_k$

?

?

$\sum_i m_i \left\{ \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \right\} = \vec{L}$

◎ 固定軸まわりの回転



- 回転軸 $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e_z}$ ： 固定

  $(\omega_x = \omega_y = 0)$

- 角運動量 $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xz}\omega_z \\ I_{yz}\omega_z \\ I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

- 回転の運動方程式

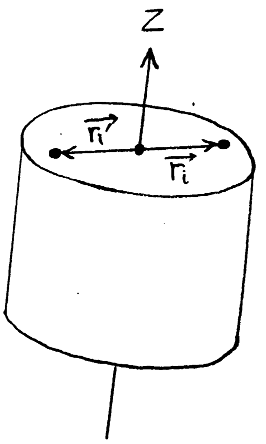
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = \vec{N}$$

$$N_x = \frac{d}{dt}(I_{xz}\omega_z)$$

$$N_y = \frac{d}{dt}(I_{yz}\omega_z)$$

$$N_z = \frac{d}{dt}(I_{zz}\omega_z)$$

- z 軸のまわりに対称な剛体



$\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ の質点に対し、
$\vec{r_i'} = (-x_i, -y_i, -z_i)$ に同じ質量 m_i の質点がある。

$$I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \overset{?}{=} -\frac{1}{2}\sum_i{}' m_i (x_i - x_i) z_i = 0$$

$$I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = -\frac{1}{2}\sum_i{}' m_i (y_i - y_i) z_i = 0$$

- 対称な剛体の場合 $(\omega_z = 一定)$

  $N_x = N_y = 0$

  回転を維持するために力のモーメント N_x, N_y が不要

- 非対称な剛体の場合

  $\omega_z = 一定$ を維持するために、$N_x \neq 0$ または $N_y \neq 0$ が必要

  (回転軸を固定するために力のモーメントが必要)