12/11(水) 微積分II 第19回(第18回は試験)

ⓐ 広義積分の計算例

- 例題5.17(1) p.210 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = ?$

関数$e^{-(x^2+y^2)}$は非負だから、$\mathbb{R}^2$のコンパクト近似列を使って計算すれば良い。
自然数mに対し、$K_m = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq m^2\right\}$とおくと、
$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$は$\mathbb{R}^2$のコンパクト近似列である。

$I_m = \displaystyle\iint_{K_m} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ とおく。

極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r\geq 0,\ \theta\in\mathbb{R})$ をすると、

$$
\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{2\pi}\int_0^{m} e^{-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)}\,r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{m} r e^{-r^2} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^m d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-m^2}+\frac{1}{2}\right)d\theta \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-m^2}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi\left(1-e^{-m^2}\right) \quad e^{-m^2}\xrightarrow{m\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

である。よって $\displaystyle\lim_{m\to\infty} I_m = \pi$ となる。以上より、

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{m\to\infty}\iint_{K_m} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$

○ 応用 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の計算

例題 5.17(1) において、$\mathbb{R}^2$ のコンパクト近似列として

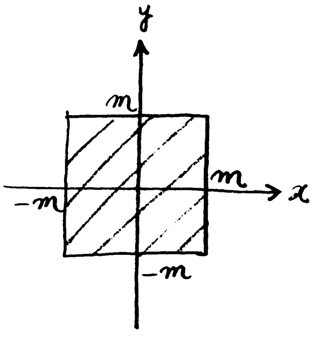
$$B_m = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|\le m,\ |y|\le m\right\} \quad (m=1,2,\dots)$$ をとる。

先程の結果から、

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{B_m} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$

(∵ 積分の値はコンパクト近似列のとり方に依らない)

ここで、



コンパクト近似列

$$\iint_{B_m} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_{-m}^{m}\int_{-m}^{m} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy$$ 変数分離している

$$= \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-m}^{m} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}dx\right)^2$$

変数の名前をかえただけ

したがって、

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

よって、

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

2乗してから lim をとるのと lim をとってから 2乗するのは同じらしい。

ここで $x\in\mathbb{R}^2$ のとき $e^{-x^2}>0$ だから、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx > 0$

よって、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

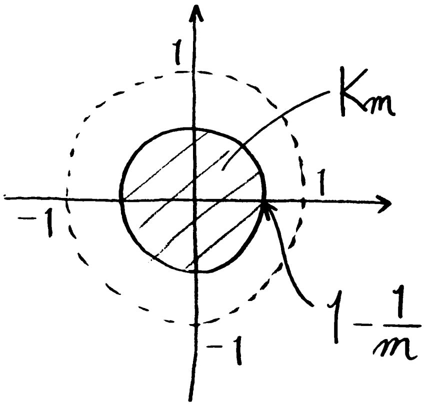
○ 例題 5.16 p.209

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1 \right\}$$ のとき、$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = ?$

関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ は D において非負なので、D のコンパクト近似列をとって計算すればよい。

自然数 m に対して、$K_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq \left(1-\frac{1}{m}\right)^2 \right\}$ とおくと、

$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ は D のコンパクト近似列である。



極座標変換を使って、

$$\begin{aligned}
\iint_{K_m} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{m}} \frac{1}{\sqrt{1-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{m}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{1-\frac{1}{m}} d\theta \\
&= 2\pi \left\{ -\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \\
&\longrightarrow 2\pi \quad (m \to \infty)
\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$

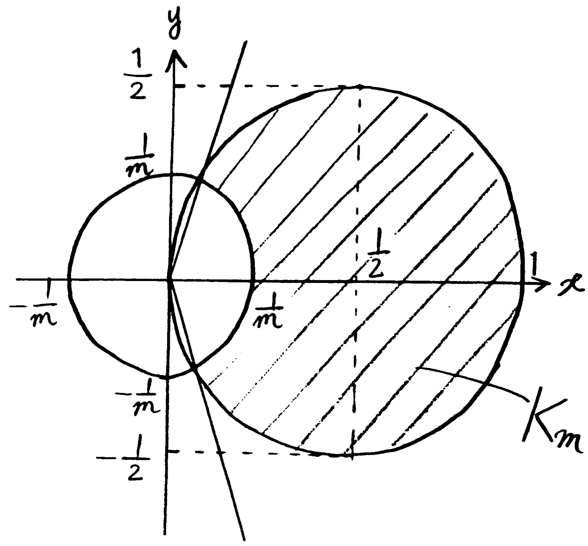
○ 例題 5.16 (2) p.206

$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x^2+y^2 \le x \right\}$ のとき、$\displaystyle\iint_E \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$

関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は E において非負だから、E のコンパクト近似列を計算すればよい。

自然数 m に対し、$K_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{m^2} \le x^2+y^2 \le x \right\}$ とおくと、

$\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ は E のコンパクト近似列である。

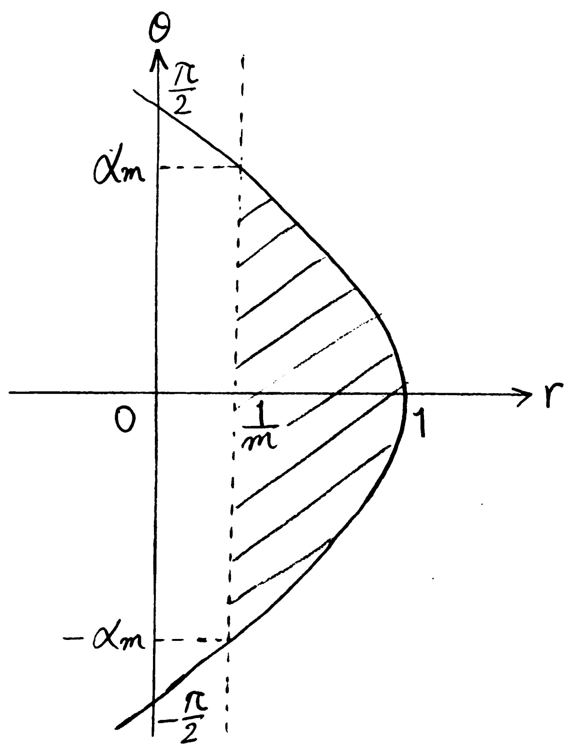


$I_m = \displaystyle\iint_{K_m} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおく。

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると、

r, θ の条件は、$\dfrac{1}{m^2} \le r^2 \le r\cos\theta$

よって、$r \ge \dfrac{1}{m}$, $r \le \cos\theta$



$\cos\alpha_m = \dfrac{1}{m}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

よって、

$$\iint_{K_m} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left(\int_{\frac{1}{m}}^{\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} r\,dr \right) d\theta$$

(ただし、$\cos\alpha_m = \frac{1}{m}$, $0 < \alpha_m < \frac{\pi}{2}$ によりα_mを定める)

$$= \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left(\int_{\frac{1}{m}}^{\cos\theta} dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left(\cos\theta - \frac{1}{m} \right) d\theta$$

$$= \left[\sin\theta - \frac{\theta}{m} \right]_{-\alpha_m}^{\alpha_m}$$

$$= 2\left(\sin\alpha_m - \frac{\alpha_m}{m} \right)$$

$m \to \infty$ のとき、$\cos\alpha_m \to \infty$ より、$\alpha_m \to \frac{\pi}{2}$。したがって、

$$\lim_{m\to\infty} I_m = \lim_{m\to\infty} 2\left(\sin\alpha_m - \frac{\alpha_m}{m} \right) = 2$$

よって、$\displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$