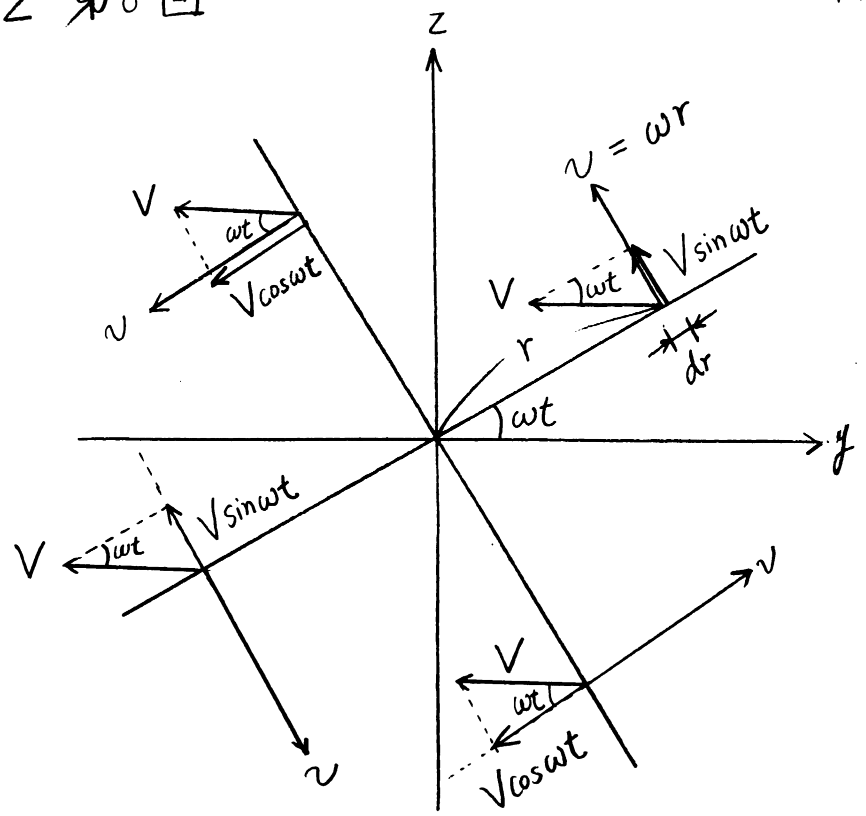
@ 小テスト兼続き

ブーメランの1枚目の羽の中で重心から距離 r にある巾 dr の部分にかかる揚力は、以下のようであった。



$$d\vec{F_1}(r,t)$$
$$= \vec{e_x}\, c\, v_t^2\, dr$$
$$= \vec{e_x}\, c\, (\vec{v} + \vec{V}\sin\omega t)^2 dr$$
$$= \vec{e_x}\, c\, (\omega^2 r^2 + 2\omega r V\sin\omega t + V^2\sin^2\omega t)$$

(1) 2, 3, 4枚目の羽で重心からの距離 r にある巾 dr の部分にかかる揚力をそれぞれ求めよ。

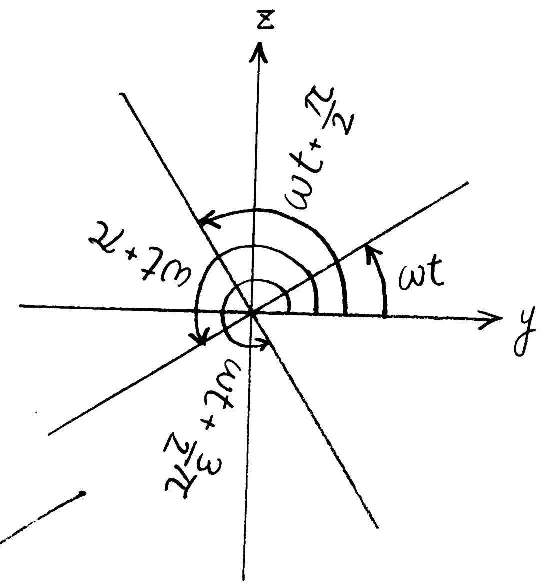
(2) 全ての羽からの寄与
$d\vec{F}(r,t) = d\vec{F_1} + d\vec{F_2} + d\vec{F_3} + d\vec{F_4}$ を求めよ。

(1)
$$d\vec{F_2} = \vec{e_x}\cdot c\cdot(\vec{v} + \vec{V}\cos\omega t)^2 dr$$
$$= \vec{e_x}\cdot c\,(\omega^2 r^2 + 2\omega r V\cos\omega t + V^2\cos^2\omega t)\,dr$$
$$d\vec{F_3} = \vec{e_x}\cdot c\,(\omega^2 r^2 - 2\omega r V\sin\omega t + V^2\sin^2\omega t)\,dr$$
$$d\vec{F_4} = \vec{e_x}\cdot c\,(\omega^2 r^2 - 2\omega r V\cos\omega t + V^2\cos^2\omega t)\,dr$$

(2)
$$d\vec{F} = \vec{e_x}\cdot c\,(4\omega^2 r^2 + 2V^2)\,dr$$

@ さらにつづく

- 羽全体にかかる力を求める



$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

$$= \int_0^{\ell} \vec{e_x}\cdot c\left(4\omega^2 r^2 + 2V^2\right) dr$$

$$= 4c\,\vec{e_x} \int_0^{\ell} \left(\omega^2 r^2 + \frac{V^2}{2}\right) dr$$

$$= 4c\,\vec{e_x} \left[\frac{1}{3}\omega^2 r^3 + \frac{V^2}{2} r\right]_0^{\ell}$$

$$= 4c\ell\left(\frac{1}{3}\omega^2\ell^2 + \frac{1}{2}V^2\right)\vec{e_x}$$

- 力のモーメントを求める　$\vec{e_y}\times\vec{e_x} = -\vec{e_z}$, $\vec{e_z}\times\vec{e_x} = \vec{e_y}$

$$d\vec{N_1} = \vec{r}\times d\vec{F_1}$$

$$= r\left(\vec{e_y}\cos\omega t + \vec{e_z}\sin\omega t\right)\times\vec{e_x}\cdot c\left(\omega^2 r^2 + 2\omega r V\sin\omega t + V^2\sin^2\omega t\right) dr$$

$$= cr\left(\cancel{\omega^2 r^2} + 2\omega r V\sin\omega t + \cancel{V^2\sin^2\omega t}\right)\cdot\left(\cancel{\vec{e_y}\sin\omega t} - \cancel{\vec{e_z}\cos\omega t}\right) dr$$

あとはωが変わるだけ!(小テストで$d\vec{F}$を求めるのと同じ)

$$d\vec{N_2} = cr\left(\cancel{\omega^2 r^2} + 2\omega r V\cos\omega t + \cancel{V^2\cos^2\omega t}\right)\left(\cancel{\vec{e_y}\cos\omega t} + \cancel{\vec{e_z}\sin\omega t}\right) dr$$

$$d\vec{N_3} = cr\left(\cancel{\omega^2 r^2} - 2\omega V\sin\omega t + \cancel{V^2\sin^2\omega t}\right)\left(-\cancel{\vec{e_y}\sin\omega t} + \cancel{\vec{e_z}\cos\omega t}\right) dr$$

$$d\vec{N_4} = cr\left(\cancel{\omega^2 r^2} - 2\omega V\cos\omega t + \cancel{V^2\cos^2\omega t}\right)\left(-\cancel{\vec{e_y}\cos\omega t} - \cancel{\vec{e_z}\sin\omega t}\right) dr$$

足し合わせると、

$$d\vec{N} = 4c\omega r^2 V dr\,\vec{e_y}$$ になる(確かめてみよう)。

○ 羽全体からくる力のモーメントを求める。

$$\vec{N} = \int d\vec{N}$$

$$= \int_0^{l} 4c\omega r^2 V \vec{e_y}\, dr$$

$$= \frac{4}{3} c\omega V l^3 \vec{e_y}$$

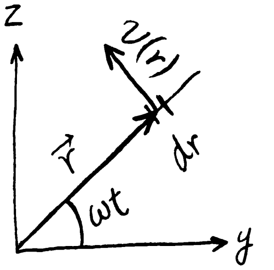
○ 重心まわりの角運動量を求める。

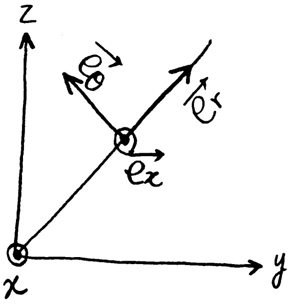
• $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$

• $\vec{e_\theta}, \vec{e_r}$ という座標をおく。

$\vec{v} = \omega r \vec{e_\theta}$, $\vec{r} = r\vec{e_r}$

$\vec{e_r} \times \vec{e_\theta} = \vec{e_x}$





• $d\vec{L} = \vec{r} \times \boxed{dm}\,\vec{v}$ — drの部分の質量

$$= \vec{e_x} \cdot \boxed{\frac{M}{4l} dr} \cdot \omega r^2$$

• $\vec{L_1} = \int dL$

$$= \vec{e_x} \int \frac{M}{4l} \omega r^2 dr$$

$$= \frac{1}{12} M \omega l^2 \vec{e_x}$$

• $\vec{\omega} = \omega \vec{e_x}$

$\vec{L} = 4\vec{L_1}$

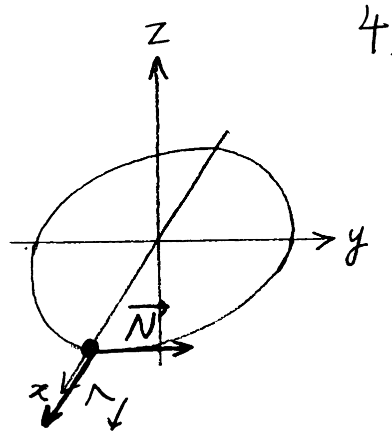
$$= \boxed{\frac{1}{3} M l^2} \vec{\omega}$$

$\vec{L}$ と $\vec{\omega}$ の比例定数は慣性モーメント I

$$I = \frac{1}{3} M l^2$$

○ 運動方程式

● 角運動量の時間変化

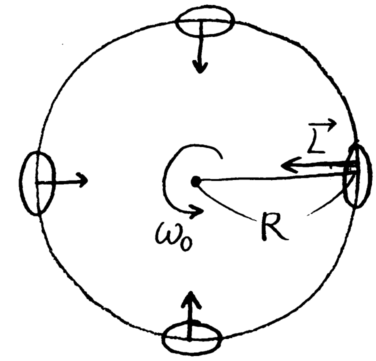


$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$, $\vec{L} \perp \vec{N}$ → 歳差運動をする

歳差運動の角速度 ω_p

$$\omega_p = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{L}|} = \frac{\frac{4}{3}c\omega V l^3}{\frac{1}{3}Ml^2\omega} = \frac{4cVl}{M} = \frac{c}{\delta}V$$

● 重心の円運動



半径 R（今から求める）
角速度 ω_0
速度 $V = \omega_0 R$

○ 重心の円運動の角速度 = 歳差運動の角速度
であるから、

$$\omega_p = \omega_0 \quad \therefore \frac{4cVl}{M} = \frac{V}{R}$$

$$\therefore R = \frac{M}{4cl} = \frac{\delta}{c}$$

δ ← 線密度（材料・太さ・巾）
c ← 羽の形状・空気の物性

○ 向心力と遠心力のつり合い

$$\underbrace{\cancel{4lc}\left(\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right)}_{\text{向心力 ?}} = \underbrace{\frac{MV^2}{R}}_{\text{遠心力}} = \frac{\cancel{4cl}}{\cancel{M}}\cancel{M}V^2$$

$$\frac{\omega^2 l^2}{3} = \frac{V^2}{2}$$

$$\therefore \underbrace{V}_{\text{重心の速度}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega l$$

ω ← ブーメランの回転の角速度

投げ方に工夫が必要なことがわかる

○ ただし、重力と空気抵抗を無視した。 揚力 ～ cV^2

重力 Mg 　 空気抵抗 $-bV$

Mが小さく 　 Vが大きい