11/27 微積分II 第15回

ⓐ 重積分の変数変換(つづき)

○ 定理5.16 (p.201)

Oは$\mathbb{R}^2$の空でない開集合、DはOに含まれる有界閉集合であるとする。

写像$\Phi: O \to \mathbb{R}^2$　$\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$について、

φとψはOにおいてC^1級であるとする。

このとき、関数$J\Phi$を次で定める。

$$J\Phi(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

(これをΦのヤコビアンという)

DとΦについて次の(1), (2)が成り立つとする。

(1) D, $\Phi(D)$はジョルダン可測

(2) ジョルダン外測度が0であるようなDの部分集合を除いて、

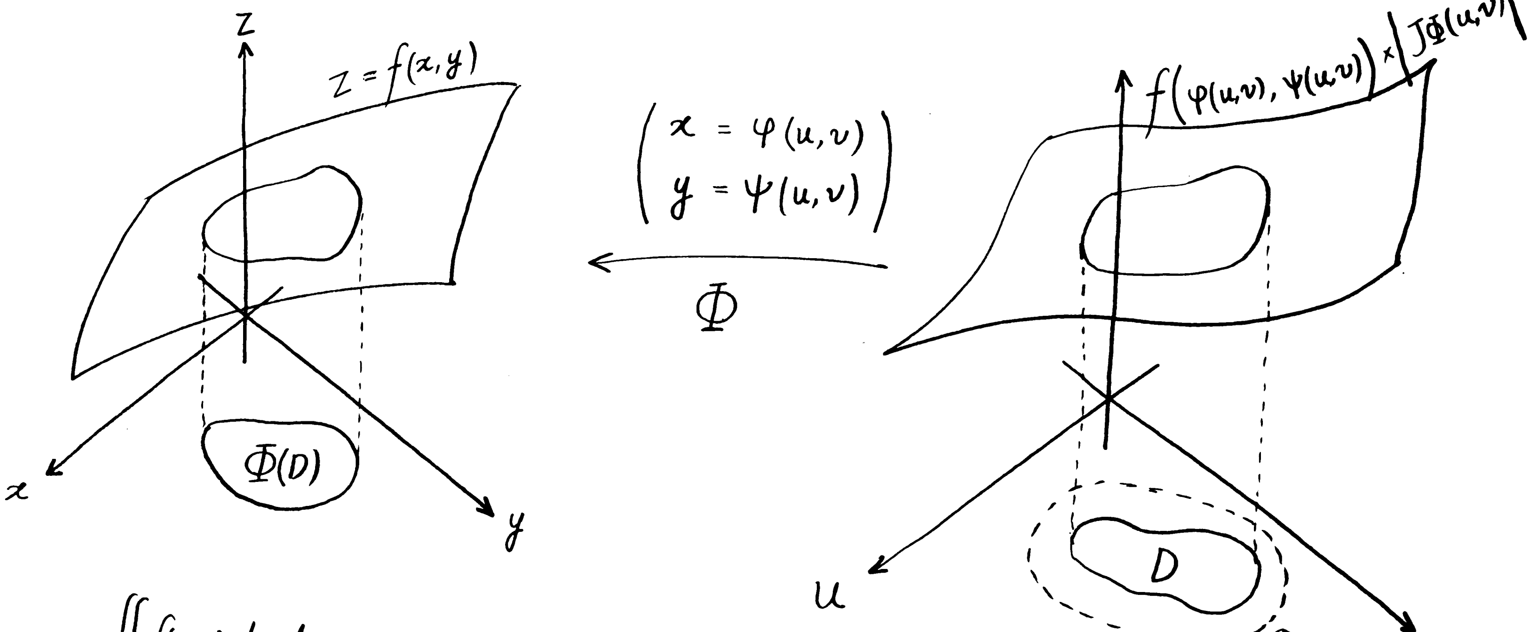
$J\Phi(u,v) \neq 0$ かつ Φは1対1(単射)

このとき、$\Phi(D)$において連続な関数$f(x,y)$に対し、次の等式が成り立つ。

$$\iint_{\Phi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| J\Phi(u,v) \right| \cdot du\,dv$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$x = \varphi(t)$



$$\iint_{\Phi(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |J\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

○ 記号

変数変換 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ のヤコビアンを $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ と書くこともある。このとき変数変換の公式を

$dx\,dy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$ と略記することもある。

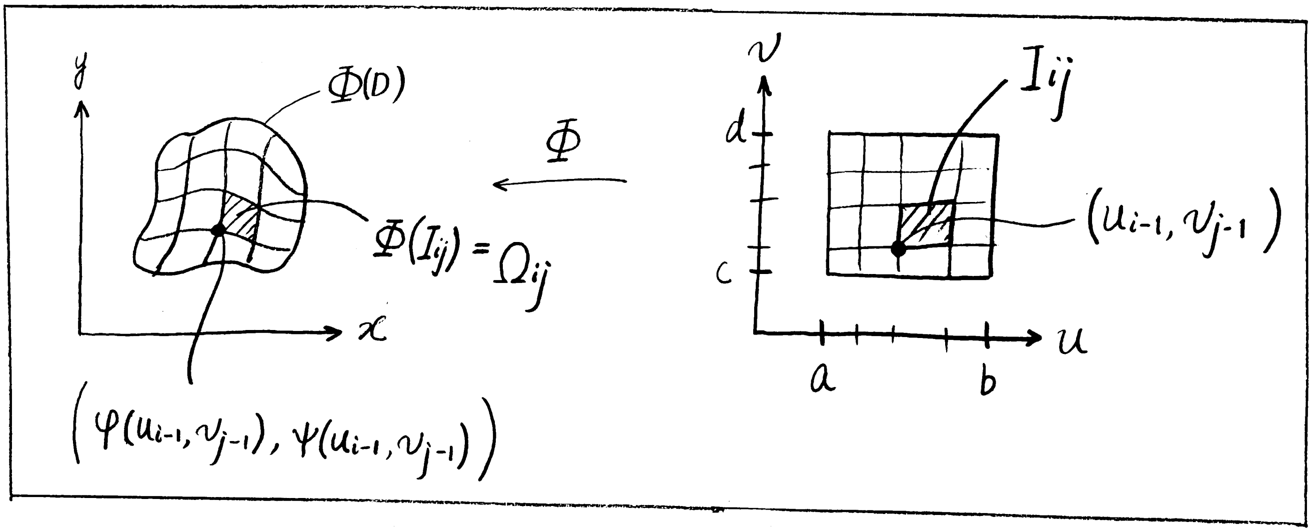
☆ 変数変換の公式の"説明"

- 話を簡単にするために、Dが有界閉区間 $D=[a,b]\times[c,d]$ の場合を考える。

- 分割 $a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b$

  $c=v_0<v_1<\cdots<v_n=d$ を十分細かくとって、

$I_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$ とおく。



$\Omega_{ij}=\Phi(I_{ij})$ とおくと、分割が十分細かければ、

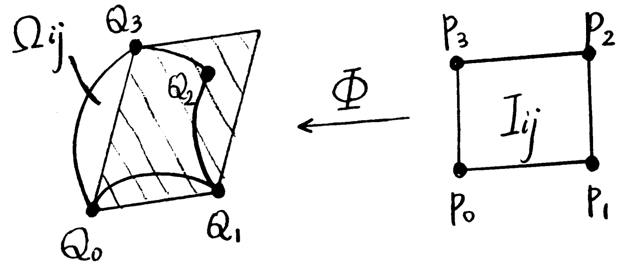
$$\iint_{\Phi(D)} f(x,y)\,dx\,dy \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\big(\varphi(u_{i-1},v_{j-1}),\psi(u_{i-1},v_{j-1})\big)\times(\Omega_{ij}\text{の面積})$$

と近似できるだろう。

- Ω_{ij} の面積は次のように近似できる。

  - **事実**

    Ω_{ij} の面積は、Q_0Q_1, Q_0, Q_3 を隣り合う2辺とする平行四辺形の面積で十分よく近似できる。



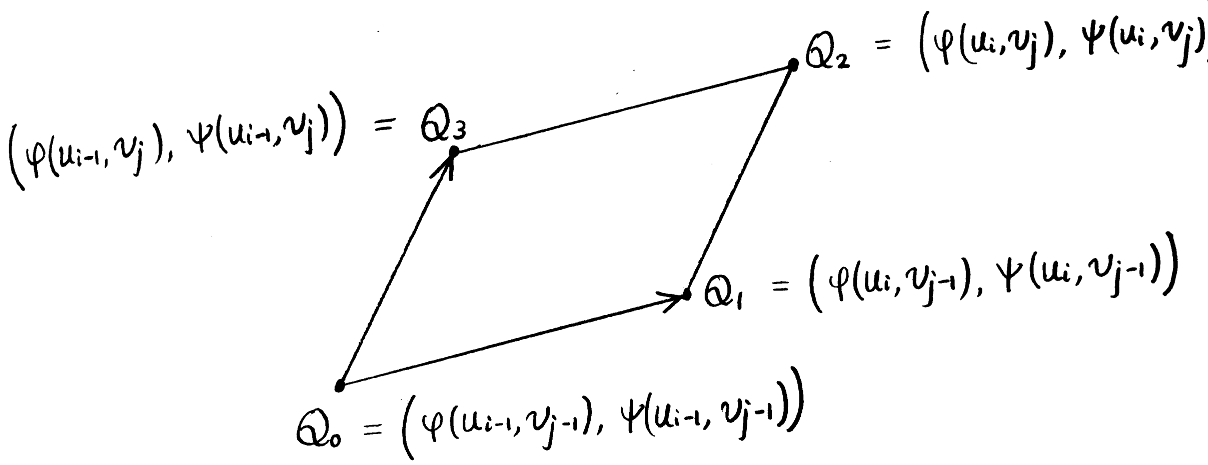
$\left(Q_i = \Phi(P_i) \right)$

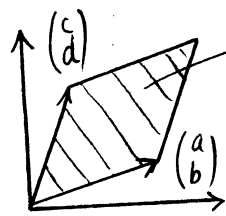
- いま、

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix} \varphi(u_i, v_{j-1}) - \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \psi(u_i, v_{j-1}) - \psi(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_3} = \begin{pmatrix} \varphi(u_{i-1}, v_j) - \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \psi(u_{i-1}, v_j) - \psi(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{pmatrix}$$

である。





この面積は $|ad - bc| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$

ここがヤコビアンになる。

- これをさらに近似する。

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

$$\varphi(u_i, v_{j-1}) = \varphi\Big(u_{i-1} + \underbrace{(u_i - u_{i-1})}_{\text{十分小}}, v_{j-1}\Big)$$

$$\fallingdotseq \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1})\cdot(u_i - u_{i-1})$$

$$\left(\begin{aligned} \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) &= \varphi\big(u_i + (u_{i-1} - u_i), v_{j-1}\big) \\ &\fallingdotseq \varphi(u_i, v_{j-1}) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_i, v_{j-1})\cdot(u_{i-1} - u_i) \\ &= \varphi(u_i, v_{j-1}) - \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_i, v_{j-1})(u_i - u_{i-1}) \end{aligned}\right)$$

他の成分についても同様に近似すると、

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = (u_i - u_{i-1})\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_3} = (v_j - v_{j-1})\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{pmatrix}$$

よって、

$$(\Omega_{ij} \text{の面積})$$

$$\fallingdotseq (\text{平行四辺形 } Q_0Q_1Q_2Q_3 \text{ の面積})$$

$$\fallingdotseq (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \times \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}), & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}), & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|J\Phi(u_{i-1}, v_{j-1})\right|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

以上より、

$$\iint_{\Phi(D)} f(x,y)\,dxdy \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{f\big(\varphi(u_{i-1}, v_{j-1}), \psi(u_{i-1}, v_{j-1})\big)\cdot\left|J\Phi(u_{i-1}, v_{j-1})\right|}_{\text{関数}} \times \underbrace{(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})}_{\text{底面積}}$$

この右辺は、関数 $f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J\Phi(u,v)|$ のリーマン和だから、
分割を細かくすると、

$$\iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|J\Phi(u,v)|\,du\,dv$$ に収束する。