11/26 微積分II 第14回

- 12/10(火) 中間試験

◎ (続き) フビニ型の定義

- (続き) 積分領域が有界閉区間の場合
  - **例2** (変数分離していないとき)

$I = [0,1] \times [0,2]$ のとき $\iint_I \sqrt{x+y}\,dxdy$.

$$\iint_I \sqrt{x+y}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{x+y}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

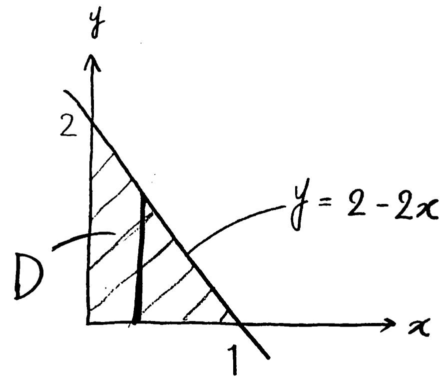
$$= \frac{4}{15} \left\{ \left(3^{\frac{5}{2}} - 1\right) - \left(2^{\frac{5}{2}} - 0\right) \right\}$$

$$= \frac{4}{15} \left(9\sqrt{3} - 1 - 4\sqrt{2} \right)$$

o 縦線型集合の場合

・<u>例</u>

図の$\overbrace{\text{積分領域}}^{D}$に対して $\iint_D x^2y\,dx\,dy$



$$\iint_D x^2y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x^2y\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (2-2x)^2 dx$$

$$= 2 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{15}$$

・<u>注意</u>

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x^2y\,dy \right) dx \neq \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\int_0^{2-2x} y\,dy \right)$$

積分領域が有界閉区間ではない!!

② 積分の順序交換

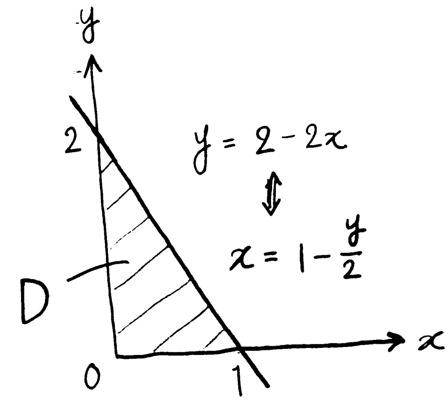
- yについての縦線型集合

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2-2x \right\}$ は、

xについての縦線型集合

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1-\frac{y}{2},\ 0 \le y \le 2 \right\}$

とも見える。



よって、

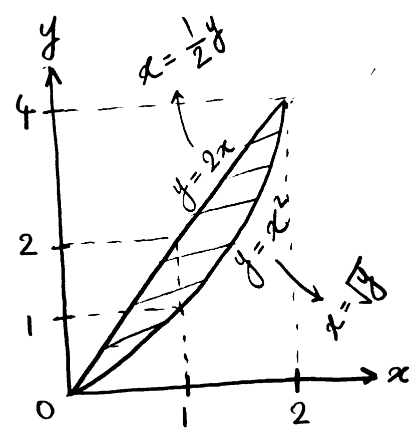
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \boxed{\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

重積分の積分領域が x, y の両方について縦線型集合のとき、上の等式（□で囲ったところ）のように積分の順序を交換できる。

- 例

$\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$ の積分の順序を交換する。

積分領域は、$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x \right\}$



よって、

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

・例

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2y} e^{-y^2} dx \right) dy$$

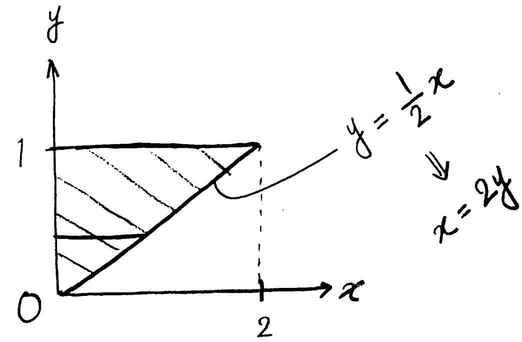
$$= \int_0^1 2y \cdot e^{-y^2} dy$$

このくらいは
朝の子で
できるよね？

$$= \left[-e^{-y^2} \right]_0^1$$

$$= -e^{-1} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-1}$$



・たいくつな人用

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sqrt{1+y^2}\, dy \right) dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$ になる.

中間テストここまで.

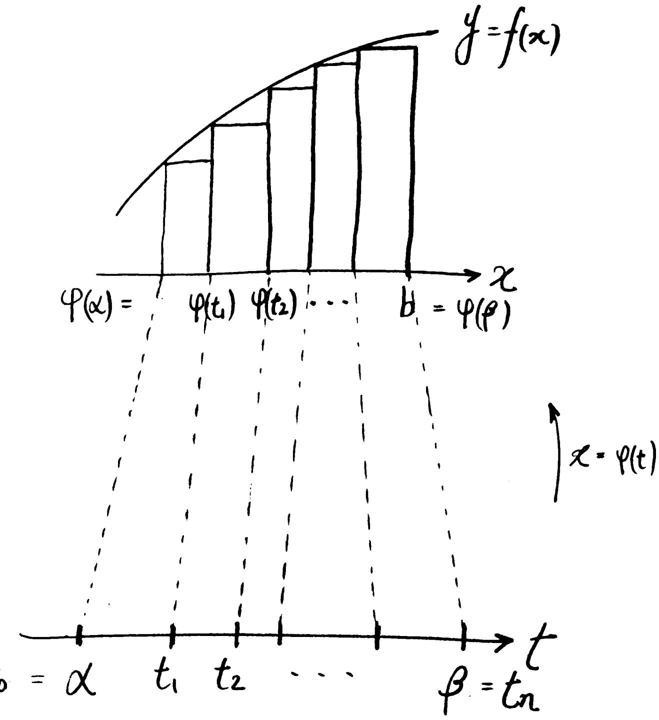
② 重積分の変数変換

○ 1変数の場合

$x = \varphi(t)$ という変数変換で、t が α から β まで動くとき、
x が a から b まで動くなら、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

この公式を見直そう。
ここでは話を簡単にするために、φ は単調増加で $\alpha < \beta$ であるとする。



- 閉区間 $[\alpha, \beta]$ の分割

  $\alpha < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

  を十分細かくとると、

  $$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(t_{i-1}))\left(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\right)$$

  と近似できる。

- さらに、φ の1次近似式を使って、

  $$\varphi(t_i) = \varphi\Big(t_{i-1} + \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\text{十分小さい}}\Big)$$

  $$\fallingdotseq \varphi(t_{i-1}) + \varphi'(t_{i-1})\cdot(t_i - t_{i-1})$$

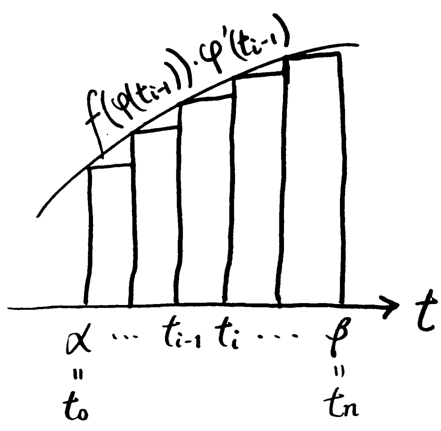
1次近似 (1階微分から)

$\varphi(x+h) \fallingdotseq \varphi(x) + \varphi'(x)\cdot h$

(h が小さい)

よって、

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\varphi(t_{i-1}))\cdot\varphi'(t_{i-1})}_{\text{関数}}\cdot\underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\text{幅}}$$ と見る。



この右辺は、関数 $f(\varphi(t_{i-1}))\cdot\varphi'(t_{i-1})$ のリーマン和
である。分割を細かくすると、右辺は、

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$ に収束する。