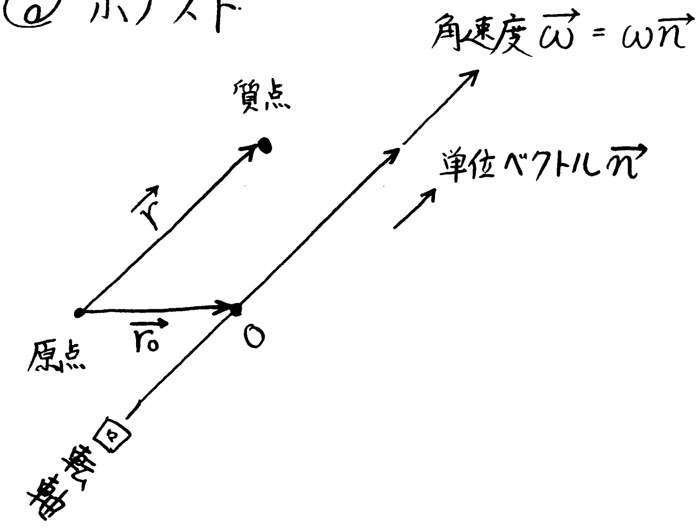
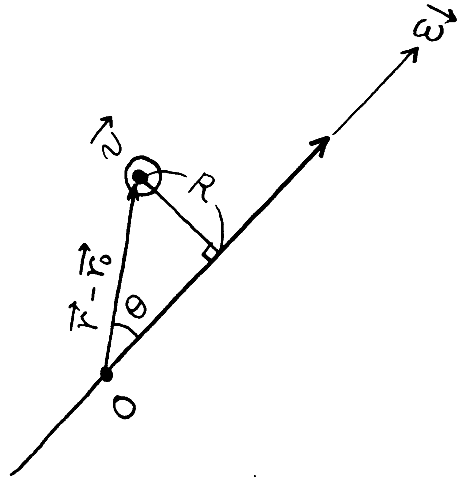
@ 小テスト



(1) 質点の速度 $\vec{v}$ を
$\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{r_0}$ で表せ。

(2) 質点の質量を m とする。
O に対する質点の角運動量を求めよ。

(1) $\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})$ である。



○ **補足**

右図のように θ, R をおく。

$$R = |\vec{r} - \vec{r_0}| \sin\theta \quad (\because 図より)$$

$$= |\vec{r} - \vec{r_0}||\vec{n}| \sin\theta \quad (|\vec{n}| = 1 より)$$

$$= |\vec{n} \times (\vec{r} - \vec{r_0})| \quad (外積)$$

$$v = \omega \boxed{R}$$

$$= \omega |\vec{n} \times (\vec{r} - \vec{r_0})|$$

$$= |\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})| \quad (\because \vec{\omega} = \omega\vec{n} より)$$

(2) $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r_0}) \times m\boxed{\vec{v}}$　　$\because$ $\vec{L} = (\overrightarrow{基準点からの位置}) \times (\overrightarrow{運動量})$

$$= (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \{m\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})\}$$

とりあえずここまで書ければ満足

(2) のつづき

- ϵ_{ijk} 完全反対称テンソルを導入。

$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \\ (\text{それ以外})\ (\epsilon_{112}, \dots, \epsilon_{333}) = 0 \end{cases}$$

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ は、

$(\vec{L})_i = L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} r_j p_k$ と表せる。

例えば、

$$L_1 = \sum_{jk} \epsilon_{1jk} r_j p_k = \epsilon_{123} r_2 p_3 + \epsilon_{132} r_3 p_2 = r_2 p_3 - r_3 p_2$$

$$\therefore L_x = y p_z - z p_y$$

$$L_2 = \sum_{jk} \epsilon_{2jk} r_j p_k = \epsilon_{213} r_1 p_3 + \epsilon_{231} r_3 p_1 = -r_1 p_3 + r_3 p_1$$

$$\therefore L_y = -x p_z + z p_x$$

- Einsteinの規約

$\sum$ を書くのが大変なので、複数回出てる添字は、$\sum$ の変数とする。

$$\epsilon_{i\underline{j}\underline{k}} r_{\underline{j}} p_{\underline{k}} \equiv \sum_{jk} \epsilon_{ijk} r_j p_k = L_i$$

- クロネッカーのデルタ

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \right)$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}$$

$$= \sum_k \left(\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\right)$$

$$= \epsilon_{ij1}\epsilon_{1lm} + \epsilon_{ij2}\epsilon_{2lm} + \epsilon_{ij3}\epsilon_{3lm}$$

$$\cancel{= \left(\epsilon_{231}+\epsilon_{321}\right)\left(\epsilon_{123}+\epsilon_{132}\right) + \left(\epsilon_{132}+\epsilon_{312}\right)\left(\epsilon_{213}+\epsilon_{231}\right) + \left(\epsilon_{123}+\epsilon_{213}\right) + \left(\epsilon_{312}+\epsilon_{321}\right)}$$

$$\cancel{\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1}$$

${}_3P_2 = 6 \quad {}_3P_2 = 6$

$(i,j),(l,m)$	$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}$	$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
$(1,2),(1,2)$	$\epsilon_{123}\epsilon_{312} = 1$	$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} = 1$
$(1,2),(1,3)$	0	$\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{21} = 0$
$(1,2),(2,3)$	0	$\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{22} = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$(\vec{L})_i = m\,\epsilon_{ijk}\,(\vec{r}-\vec{r}_0)_j\,\epsilon_{klm}(\vec{\omega})_l\,(\vec{r}-\vec{r}_0)_m$$

$$\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

?

$$= m\left(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)(\vec{r}-\vec{r}_0)_j\,(\vec{\omega})_l\,(\vec{r}-\vec{r}_0)_m$$

?

$$= m\left(\omega_i\, r_j r_j - r_i\,\omega_j r_j\right)$$

$$= m\left\{(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}\right\}$$

? $(\vec{D}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk}\,\delta_j\,B_k$?

$\neq$

$\vec{D}\times\vec{A}$

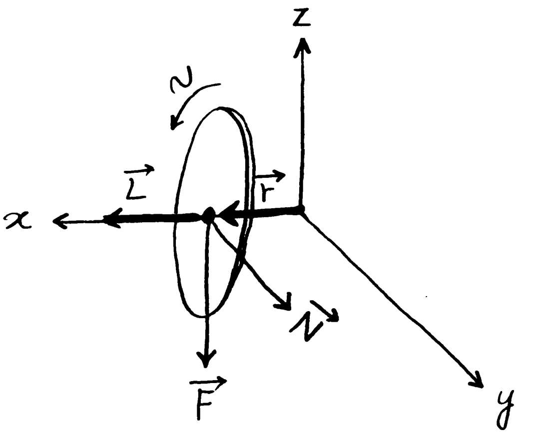
ⓐ ジャイロスコープ効果

o 原点Oに対して角運動量 $\vec{L}$ をもった系を考える。：何らかの回転運動
そこに $\vec{L}$ と直交する力のモーメント $\vec{N}$ が加わるとする。

• 角運動量の時間発展

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{ext}$$ ← 以下ext省略

$$d\vec{L} = \vec{N}^{ext}dt$$



• $\sqrt{(\vec{L}+d\vec{L})^2}$

$$= \sqrt{\vec{L}^2 + d\vec{L}^2}$$

$$= |\vec{L}|\sqrt{1+\frac{d\vec{L}^2}{\vec{L}^2}}$$

$$= |\vec{L}|\Bigl(1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{d\vec{L}^2}{\vec{L}^2}}}_{\to 0}+\cdots\Bigr) \quad ?$$

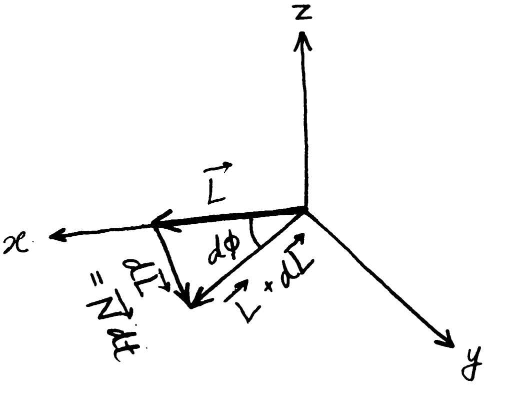
$$\left(\begin{aligned}&(\vec{L}+d\vec{L})^2\\ &= \vec{L}^2 + \underbrace{2\vec{L}\cdot d\vec{L}}_{\vec{L}\cdot\vec{N}dt=0} + \underbrace{d\vec{L}^2}_{\to 0}\\ &= \vec{L}^2 + d\vec{L}^2\end{aligned}\right) \quad ?$$

• 角運動量ベクトルは xy 平面内で回転する。

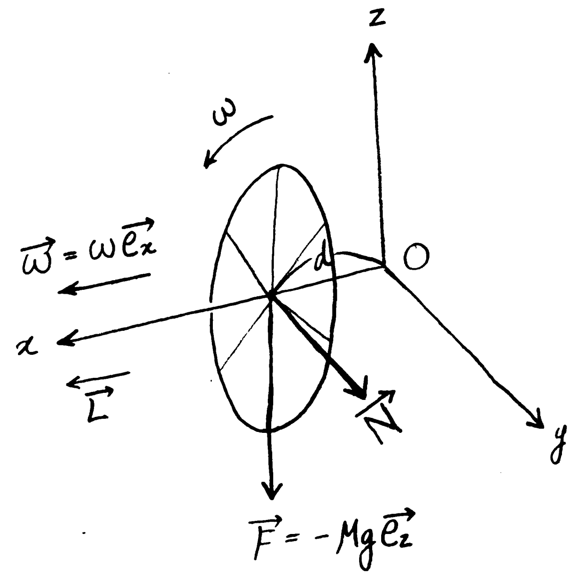
微少角度 $d\phi = \dfrac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \dfrac{|\vec{N}|}{|\vec{L}|}dt$

歳差運動の角速度 ω_p

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{L}|}$$



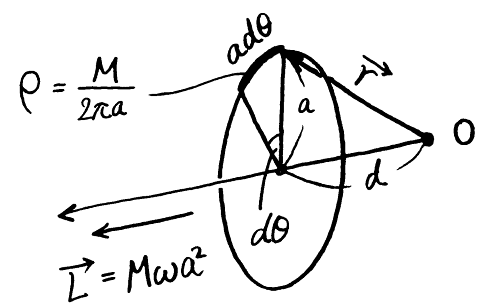
○ 回転している車輪（全質量が外輪に集中）を落とす。



• Oに対する力のモーメント

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$=(d\vec{e_x})\times(-Mg\vec{e_z})$$
$$=Mgd\vec{e_y}$$

• Oに対する角運動量



各質点の角運動量を足し合わせる。

$$d\vec{L}=\underbrace{\rho a d\theta}_{dm}\left(\underbrace{\vec{\omega}}_{\omega\vec{e_x}}r^2-\vec{r}\,\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{\omega d}\right)$$

$$\vec{r}=d\vec{e_x}+a\vec{e_r}$$
$$r^2=d^2+a^2$$

$$\therefore d\vec{L}=\rho a d\theta\left(\omega\vec{e_x}(d^2+a^2)-(d\vec{e_x}+a\vec{e_r})\omega d\right)$$
$$=\rho a d\theta\,\omega\left(d^2\vec{e_x}+a^2\vec{e_x}-d^2\vec{e_x}-ad\vec{e_r}\right)$$
$$=\rho a d\theta\,\omega\left(a^2\vec{e_x}-ad\vec{e_r}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}d\vec{L}=\int_0^{2\pi}\rho a\ \omega\left(a^2\vec{e_x}-ad\vec{e_r}\right)d\theta \qquad \int_0^{2\pi}\vec{e_r}=0$$
$$=\rho a\omega a^2\cdot\vec{e_x}\cdot 2\pi \qquad \rho=\frac{M}{2\pi a}$$
$$=M\omega a^2\vec{e_x}$$

$$\therefore \vec{L}=M\omega a^2\vec{e_x}$$

•

$$\therefore\begin{cases}\vec{L}=M\omega a^2\vec{e_x}\\ \vec{N}=Mgd\vec{e_y}\end{cases}$$

- 歳差運動の角速度

$$\omega_p = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{L}|} = \frac{gd}{\omega a^2}$$

$$d = a = 30\,cm = 0.3\,m$$

ω : 10回転/秒　$\omega = 10 \cdot 2\pi / s$

$$\therefore \omega_p = \frac{9.8\,[m/s^2]}{10 \cdot 2\pi\,[/s] \cdot 0.3\,[m]}$$

$$= 0.083 \cdot 2\pi\,[/s] \longrightarrow \text{12秒で1回転}$$

$d\vec{L_p}$ 章動

- 次回小テスト

O が固定されてなかったらどうなるの？

$\vec{L}$ は？

$\vec{N}$ は働いている？