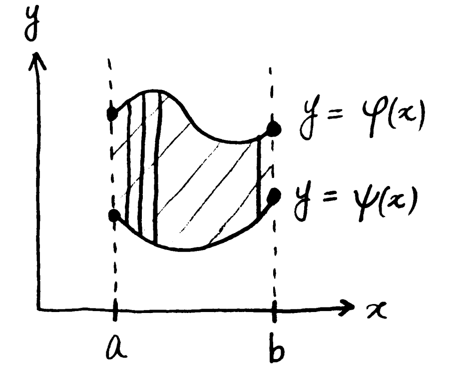
11/20 微積分Ⅱ 第13回

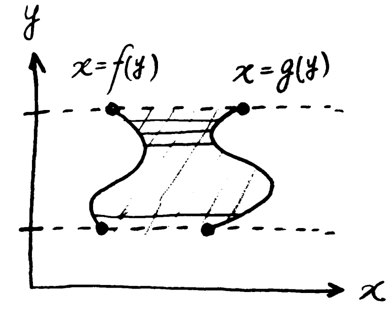
◎ 縦線型集合 (p.181)



○ 閉区間 $[a,b]$ において連続な関数 $\psi(x)$, $\varphi(x)$ を適当にとって、

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \psi(x)\le y\le\varphi(x)\}$$

の形に書ける $\mathbb{R}^2$ の部分集合を y についての縦線型集合という。

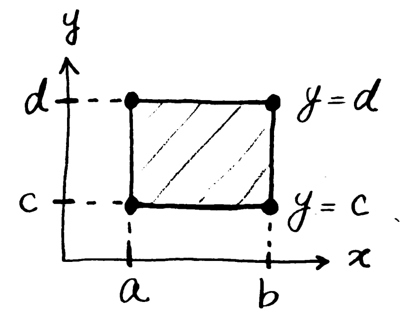


○ 同様に、$[c,d]$ において連続な関数 $f(y)$, $g(y)$ を使って

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(y)\le x\le g(y),\ c\le y\le d\}$$

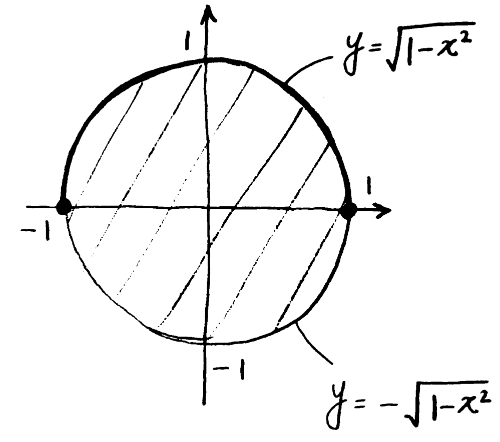
の形に書ける集合を x についての縦線型集合という。

○ <u>例1</u>



$\mathbb{R}^2$ の有界閉区間は、(x についても y についても) 縦線型集合。

○ <u>例2</u>



$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$$ も縦線型集合。

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}$$

と書けるから。

- 補題 5.1 (p.175)

  ($\mathbb{R}^2$の) 有界閉区間上で連続な関数 $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ は、
  ($\mathbb{R}^2$において) ジョルダン外測度が 0 である。
  (証明は教科書。有界閉区間上で連続な関数は一様連続、を使う。)

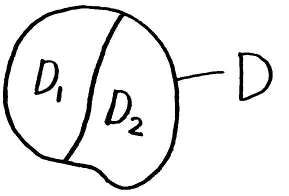
- この補題と、定理 5.6 より、
  縦線型集合はジョルダン可測である。

  B を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする。
  「B がジョルダン可測である。」
  $\Longleftrightarrow$「$\underbrace{\partial B}_{B\text{の境界}}$ のジョルダン外測度が 0」

- したがって 定理 5.8 より、
  縦線型集合 D において連続な関数 $f(x,y)$ は
  D においてリーマン積分可能。

  ジョルダン可測な集合上で
  有界で連続な関数は
  リーマン積分可能
  (いいかげん版)

◎ 重積分の基本性質



- <u>定理 5.10</u> (p.182)

(2) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

(証明は重積分の定義から)

◎ フビニ型の定義

- 縦線型集合を積分領域とする重積分は次のようにして計算できる。
- 定理 5.12, 13 (p.190-191)

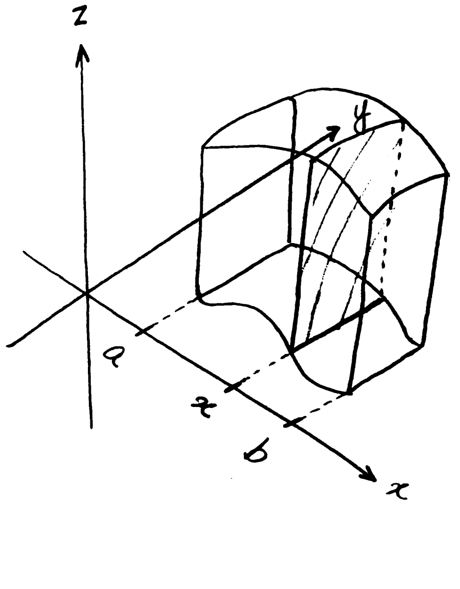
(1) yについての縦線型集合$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \psi(x)\le y\le\varphi(x)\}$
において連続型関数$f(x,y)$に対し、

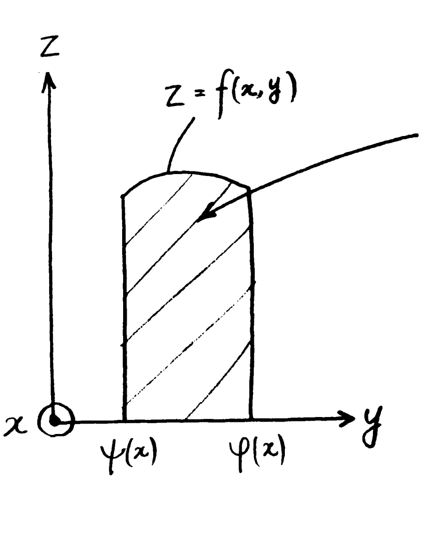
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$ がなりたつ。

(2) xについての縦線型集合$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \xi(y)\le x\le\eta(y),\ c\le y\le d\}$
において連続な関数$f(x,y)$に対し、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\left(\int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$ がなりたつ。

- (1)の等式の意味.



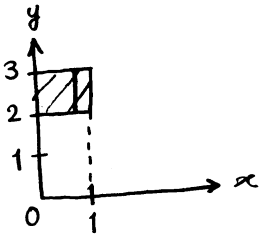


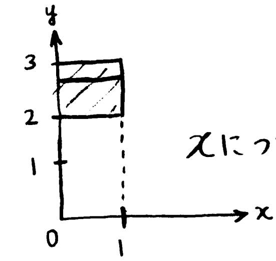
この断面積
$\displaystyle = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy$
これをxについて
aからbまで積分すれば
全体の体積となる。

○ 積分領域が有界閉区間の場合

- 例1

$D=[0,1]\times[2,3]$ のとき、$\iint_D x^2y\,dxdy$ を計算する。





xについて先に積分

$$\iint_D x^2y\,dxdy$$
$$=\int_0^1\left(\int_2^3 x^2y\,dy\right)dx$$
$$=\int_0^1\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=2}^{y=3}dx$$
$$=\int_0^1\frac{5}{2}x^2\,dx$$
$$=\frac{5}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{5}{6}$$

$$\iint_D x^2y\,dxdy$$
$$=\int_2^3\left(\int_0^1 x^2y\,dx\right)dy$$
$$=\int_2^3\left[\frac{x^3}{3}\cdot y\right]_{x=0}^{x=1}dy$$
$$=\int_2^3\frac{y}{3}\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{6}$$

- この例は次のことに注意すれば簡単に計算できる。

系5.1 (の特別な場合) p.187

関数 $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ閉区間 $[a,b]$, $[c,d]$ において連続ならば、

$D=[a,b]\times[c,d]$ とすると、

$$\iint_D f(x)g(x)\,dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(x)dy\right)$$ がなりたつ。

- 有界閉区間で
- 変数分離

のとき!

- (証明)

$$\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x) \boxed{g(y)}\, dx \right) dy$$

xによらない

$$= \int_c^d g(y) \underbrace{\left(\int_a^b f(x)\, dx \right)}\, dy$$

yによらない

$$= \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right)$$

- 例1

$D = [0,1] \times [2,3]$ のとき

$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_0^1 x^2\, dx \right) \left(\int_2^3 y\, dy \right)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$