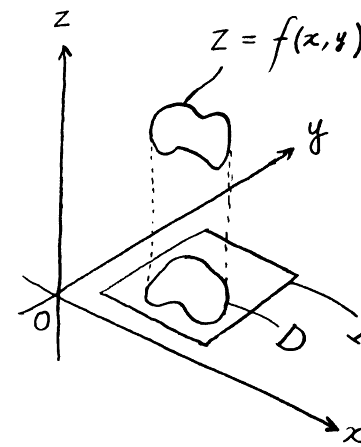
11/19 微積分Ⅱ 第12回

ⓐ 重積分の定義（その2） 〜一般の有界集合の場合〜

○ 一般に $\mathbb{R}^2$ の有界集合 D と、その上で定義された有界な関数 $f(x,y)$ に対し、重積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を定義したい。



- D は有界だから、$D\subset I$ となる有界閉区間をとれる。

  このとき $\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D) \\ 0 & ((x,y)\in I\setminus D)\end{cases}$ と定める。

  この関数 $\tilde{f}$ が（前回定義したように）I において リーマン積分可能であるとき、f は D において リーマン積分可能であるといい、

  $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_I \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$ と定める。

- 注意

  f のリーマン積分可能性 および重積分の値は I のとり方によらない。

☆ この定義から、関数 f が D においてリーマン積分可能かどうかは「D がどのような形をしているか」にも依存する。

② ジョルダン測度と可測集合

○ <u>定義 (p.173)</u>

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A に対し、関数 $\chi_A(x,y)$ を $\chi_A = \begin{cases} 0 & ((x,y) \notin A) \\ 1 & ((x,y) \in A) \end{cases}$

で定め、A の定義関数と呼ぶ。

○ <u>定義 5.3</u> (p.174, 175)

B を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする。

$B \subset I$ となる有界閉区間 I をひとつとって固定する。

このとき、定義関数 χ_B の I における上積分 $\overline{S}(\chi_B)$, 下積分 $\underline{S}(\chi_B)$ を

それぞれ B の <u>ジョルダン外測度</u>、<u>ジョルダン内測度</u>という。

○ ジョルダン外測度・内測度の意味

• <u>復習</u>

$$\begin{cases} \overline{S}(\chi_B) = \inf_{\Delta} \overline{S}(\chi_B ; \Delta) \\ \underline{S}(\chi_B) = \sup_{\Delta} \underline{S}(\chi_B ; \Delta) \end{cases}$$

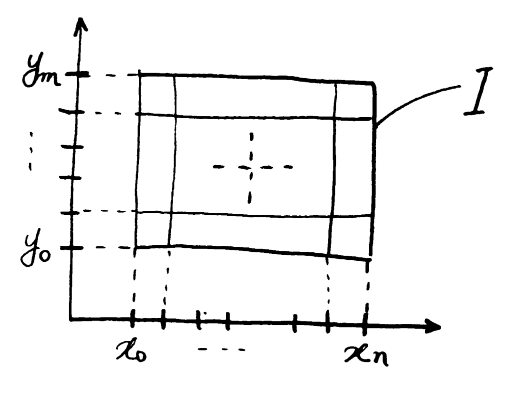
ただし、I の分割 $\Delta = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ に対して、

$$\begin{cases} \overline{S}(\chi_B ; \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ \underline{S}(\chi_B ; \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{cases}$$

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in I_{ij}} \chi_B(x,y)$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in I_{ij}} \chi_B(x,y)$$

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$



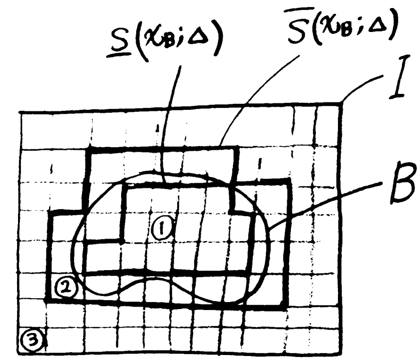
- M_{ij} と m_{ij} の値は I_{ij} と B の位置関係で定まる。

  ① $I_{ij} \subset B$ のとき、$M_{ij}=1,\ m_{ij}=1$

  ② $I_{ij} \cap B \neq \phi$ かつ $I_{ij} \cap (I \setminus B) \neq \phi$ のとき、

  $M_{ij}=1,\ m_{ij}=0$

  ③ $I_{ij} \subset I \setminus B$ のとき、$M_{ij}=0,\ m_{ij}=0$



したがって、

$\overline{S}(\chi_B;\Delta) = $ (B と交わる I_{ij} の面積の和)

$\underline{S}(\chi_B;\Delta) = $ (B に含まれる I_{ij} の面積の和)

よって、

$\overline{S}(\chi_B) = $ (B の面積を外側から測った値)

$\underline{S}(\chi_B) = $ (〃 内測 〃)

となっている。

o 可測集合

- <u>定義 5.2 のいいかえ</u> (p.173)

  $\mathbb{R}^2$ の有界集合 B について、そのジョルダン外側度とジョルダン内測度が等しいとき、B はジョルダン可測（または面積確定）であるといい、この等しい値を B の面積という。B の面積を $|B|$, $\mu(B)$ などと表す。

- <u>定理 5.6</u> (p.172)

  B を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする。B がジョルダン集合であることと、$\underbrace{\partial B}_{B\text{の境界}}$ のジョルダン外測度が 0 であることは同値である。

- <u>補足</u> (p.74)

  ∂B のジョルダン外測度が 0

  $\Longleftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して、

  ある有限個の（小さい）有限閉区間 $J_1, \dots, J_k$ が存在して、

  $\partial B \subset J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_k$ かつ $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} |J_j| < \varepsilon$

◎リーマン積分可能性の十分条件

◦ <u>定理5.8</u> (p.174)

D は $\mathbb{R}^2$ の有界集合でジョルダン可測であるとする。
D 上に定義された関数 $f(x,y)$ が D において有界で、
ジョルダン外測度が0であるような D の部分集合 A を除いて、連続であるとする。
このとき、関数 f は D においてリーマン積分可能である。