11/14 力学2 第5回

@ 小テスト

1. 保存力とは何か。

$$\underset{\text{仕事}}{W} = \int_{i}^{f} d\vec{r}\cdot\vec{F}$$

（f: final point, i: initial point）　経路によらず仕事が等しい。

$$\vec{F} = -\nabla \underset{\text{ポテンシャル}}{V}$$

2. 中心力とは何か。

$$\vec{F} = f(r)\cdot\vec{r}$$　基準点からの位置ベクトルに平行。

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$$　角運動量保存。

@ 前回：剛体

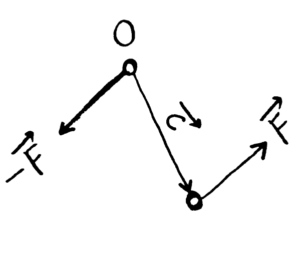
剛体の座標：6成分

6本の運動方程式

重心：$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F^{ext}} = \sum_i \vec{F_i^{ext}}$

回転：$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N^{ext}} = \sum_i \vec{r_i}\times\vec{F_i^{ext}}$

例
- $\vec{F^{ext}} \neq 0,\ \vec{N^{ext}} = 0$ ←── 自動車の設計
- $\vec{F^{ext}} = 0,\ \vec{N^{ext}} \neq 0$
  - 偶力ベクトル：2つの力 $\vec{F}$ と $-\vec{F}$ がある距離だけ離れて作用する。

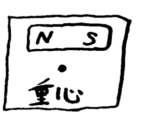


$$\vec{F^{ext}} = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

$$\vec{N_P^{ext}} = \vec{N_{CM}^{ext}}$$

$$\vec{N_O} = \vec{c}\times\vec{F}$$

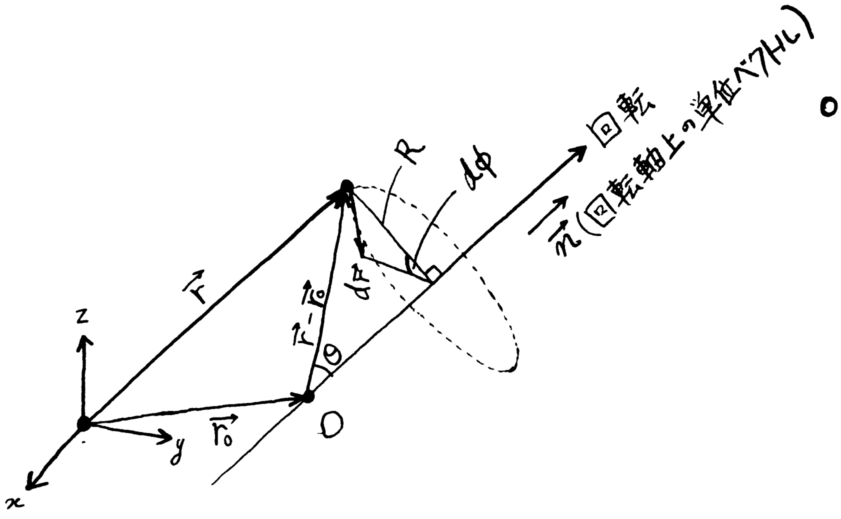
どこを基準にしてもモーメントは同じになる。



$\vec{F^{ext}} = 0$ より

重心不動

◎ 回転運動 : 回転軸上の任意の点との距離を一定に保つ運動

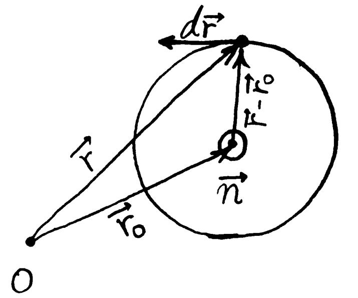


o 無限小回転 $d\vec{r}$ を考えると、

$d\vec{r} \perp (\vec{r}-\vec{r_0})$, $d\vec{r} \perp \vec{n}$

$$\therefore \begin{cases} d\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0}) = 0 \\ d\vec{r}\cdot\vec{n} = 0 \end{cases}$$

o 2次元円運動で考えると見やすい



✓ o $d\vec{r} \propto \vec{n}\times(\vec{r}-\vec{r_0})$

($d\vec{r}$ は $\vec{n}$ と $(\vec{r}-\vec{r_0})$ に直交するベクトルに平行)

✓ o $|d\vec{r}| = R\,d\phi$

✓ o $R = |\vec{r}-\vec{r_0}|\sin\theta$

$= |\vec{n}\times(\vec{r}-\vec{r_0})|$

外積の計算すれば戻るよね

↓

o $d\vec{r} = \vec{n}\times(\vec{r}-\vec{r_0})\,d\phi$

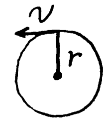
- 点Oに対する相対速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{n} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) \frac{d\phi}{dt}$$

- 角速度　$\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$

- 角速度ベクトル．$\vec{\omega} = \vec{n}(t) \dfrac{d\phi}{dt}$

高校



$v = r\omega$

大学

$\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$, $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})$

変化しうる

- 点Oが座標原点に対して$\vec{v_0}$で並進している場合
  - 原点から見た速度

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})$$

  - 剛体の条件：剛体内の任意の2点間の距離が一定

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{r_A} - \vec{r_B} \right|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\vec{r_A} - \vec{r_B})(\vec{v_A} - \vec{v_B}) = 0$$

$$\vec{v_A} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r_A} - \vec{r_0})$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r_B} - \vec{r_0})$$

$$(\vec{r_A} - \vec{r_B}) \cdot \left\{ \vec{\omega} \times (\vec{r_A} - \vec{r_B}) \right\} = 0$$

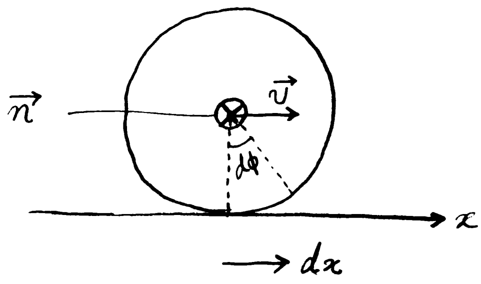
- 速度場

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) \qquad (*)$$

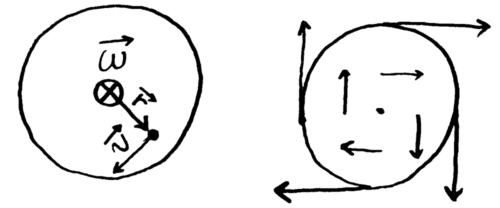
剛体内の各質点の速度は質点の場所によって異なる。

o 例：平らな地面をすべらずに転がる車輪

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\phi}{dt}\vec{e_x} = R\omega\vec{e_x}$$



$d\phi$ 回ったとき dx 進む



• 車輪上の各点の、中心（重心）に対する速度

$$\begin{aligned}\vec{v_{回転}}(\vec{r}) &= \vec{\omega}\times\vec{r} \\ &= \omega\vec{n}\times\vec{r} \\ &= v\vec{n}\times\frac{\vec{r}}{R} \quad \left(\omega = \frac{|\vec{v}|}{R} \text{より}\right)\end{aligned}$$

• 地面に対する、各点の相対速度

$$\begin{aligned}\vec{v_{地面}}(\vec{r}) &= \vec{v} + \vec{v_{回転}}(\vec{r}) \\ &= \vec{v} + v\vec{n}\times\frac{\vec{r}}{R}\end{aligned}$$

• $\vec{v_{地面}}(\overrightarrow{接地点}) = 0$ となっていることを示す

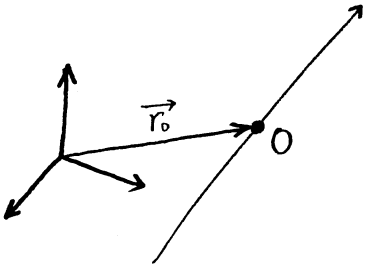
$\frac{\vec{r}}{R} = -\vec{e_y}$, $\vec{n} = -\vec{e_z}$ であるから、

$$\vec{n}\times\frac{\vec{r}}{R} = \vec{e_z}\times\vec{e_y} = -\vec{e_x}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\vec{v_{地面}}(\overrightarrow{接地点}) \\ &= \vec{v} + v\boxed{\vec{n}\times\frac{\vec{r}}{R}} \\ &= v\vec{e_x} - v\vec{e_x} \\ &= 0\end{aligned}$$

◎ 次回予告的な何か

3枚目の(*) $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r_0})$ を参照して、



$$\vec{v_0} = \frac{d\vec{r_0}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\text{何か})$$