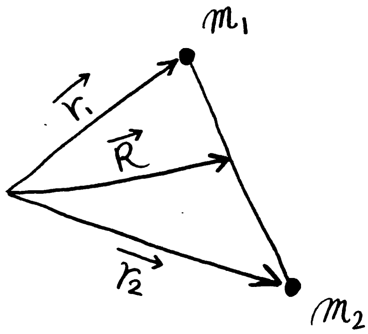
10/31(木) 力学2 第4回

@ 小テスト



$\vec{r_1}$ に m_1, $\vec{r_2}$ に m_2 が存在する2体系を考える。

(1) 全運動量を、重心運動と相対運動からの寄与に分離せよ。

(2) 全運動エネルギー 〃

(3) 全角運動量 〃

(1) $$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r_1}} + m_2\dot{\vec{r_2}} = (m_1+m_2)\dot{\vec{R}} = M\dot{\vec{R}}$$

(2) $$\vec{T} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r_1}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r_2}}^2 = \frac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\dot{\vec{r_2}}-\dot{\vec{r_1}})^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

(3) $$\vec{L} = \vec{r_1}\times m_1\dot{\vec{r_1}} + \vec{r_2}\times m_2\dot{\vec{r_2}} = \vec{R}\times(m_1+m_2)\dot{\vec{R}} + (\vec{r_2}-\vec{r_1})\times\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\dot{\vec{r_2}}-\dot{\vec{r_1}}) = \vec{R}\times M\dot{\vec{R}} + \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}}$$

@ 多体系の運動

- cf. 2体系： 空間座標は $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ の6成分 $\Longleftrightarrow$ $\vec{R}, \vec{r}$ は $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ と同じ情報を保持している。

n体系 ： 3n個の~~座標~~成分が保持している情報のうち、
全運動量 $\vec{P}$
全角運動量 $\vec{L}$
} 6個の情報でトレースできる運動のみを考える。

- $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F^{ext}}$

$\vec{r_0}$ を原点にとれば

- $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N^{ext}} + \vec{N^{int}} + \dot{\vec{r_0}} \times M(\underset{重心}{\vec{R}} - \underset{原点}{\dot{\vec{r_0}}})$

- $\vec{N^{int}} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{F_i^{int}}$, $\quad \vec{F_i^{int}} = \sum_{j \neq i} \vec{F_{ij}^{int}}$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i} (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{F_{ij}^{int}}$$

$$= \sum_{(ij)} (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{F_{ij}^{int}}$$

$\sum_{(ij)}$ は、(ij) と (ji) がダブルカウントされている。

$$= \sum_{(i<j)} \left\{ (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{F_{ij}^{int}} + (r_i - r_0) \times \vec{F_{ji}^{int}} \right\}$$

$\vec{F_{ji}^{int}} = -\vec{F_{ij}^{int}}$ 第3法則

$$= \sum_{(i<j)} (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \times \vec{F_{ij}}$$

$\vec{F_{ij}}$ は $(\vec{r_i} - \vec{r_j})$ に平行

$$= 0$$

$$\circ \quad \therefore \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N^{ext}} & \left(= \displaystyle\sum_i (r_i - r_0) \times \vec{F_i^{ext}} \right) \\ \dfrac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F^{ext}} & \left(= \displaystyle\sum_i \vec{F_i^{ext}} \right) \end{cases}$$

@ 孤立系 $\vec{F^{ext}} = 0$ かつ $\vec{N^{ext}} = 0$

- $\vec{F^{ext}} = 0 \not\Longrightarrow \vec{N^{ext}} = 0$ （$\because$ あくまで合力なので）
- $\vec{F^{ext}} = 0 \Longrightarrow \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$

  重心座標 $\vec{R} = \vec{R_0} + \dfrac{\vec{P}}{M} t$ で定まる。
- $\vec{N^{ext}} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = const.$

  n 体系の座標の決定には使えない。

  $\vec{L} = 0$ でも物体の向きを変えることは可能。

ⓐ 剛体 ⟵ $\vec{P}$ と $\vec{L}$ の運動方程式で定まるもの

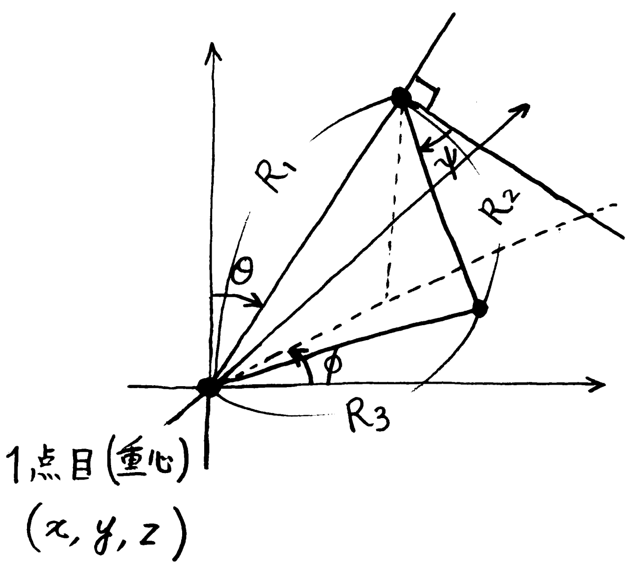
○剛体の定義

質点から成る系で、質点間の距離が不変に保たれているもの。

○剛体の自由度

重心の座標と剛体の向き：　剛体の配位は6個の成分によって定まる。
3個　　　3個

○剛体の配位 ⟷ 質点の座標



代表点を3つとり出す必要があるから、

$3 \times 3 = 9$ 成分必要？

↓

6成分で可能

R_1, R_2, R_3 は不変に保たれていて、

1点目の (x, y, z) と、

1点目から2点目を見る方向 θ, ϕ と、

R_1 軸まわりの角度 ψ

○剛体の運動　　6成分の時間変化を表す6本の方程式

$$\begin{cases} \text{重心の運動：} & \dfrac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F^{ext}} \\ \text{重心まわりの回転運動：} & \dfrac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N^{ext}} \end{cases}$$

○剛体の平衡

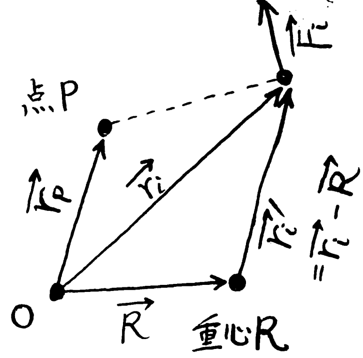
$\vec{P}$ と、重心まわりの $\vec{L}$ が変化しない。

$$\begin{cases} \dot{\vec{P}} = \vec{F^{ext}} = 0 \\ \dot{\vec{L}}_{CM} = \vec{N}^{ext}_{CM} = 0 \end{cases}$$

独立な条件

※ CM = Center of Mass system

○ 静止状態　$\vec{P}=0,\ \vec{L}=0$

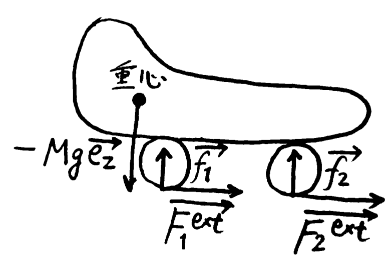


- 任意の点Pのまわりの力のモーメント $\vec{N_P}^{ext}$

$$\vec{N_P}^{ext} = \sum_i (\vec{r_i}-\vec{r_P}) \times \vec{F_i}^{ext}$$
$$= \sum_i \left\{ (\vec{r_i}-\vec{R}) + (\vec{R}-\vec{r_P}) \right\} \times \vec{F_i}^{ext}$$
$$= \underbrace{\sum_i (\vec{r_i}-\vec{R}) \times \vec{F_i}^{ext}}_{\vec{N}_{CM}^{ext}} + (\vec{R}-\vec{r_P}) \times \underbrace{\sum_i \vec{F_i}^{ext}}_{\vec{F}^{ext}}$$

$$\therefore\ \vec{N_P}^{ext} = \underbrace{\vec{N}_{CM}^{ext}}_{0} + (\vec{R}-\vec{r_P}) \times \underbrace{\vec{F}^{ext}}_{0} \longrightarrow 0$$

○ $\vec{F}^{ext} \neq 0,\ \vec{N}^{ext} = 0$ となるべき系　　自動車の設計



- 地面にめりこまない

$$\vec{f_1} + \vec{f_2} - Mg\vec{e_z} = 0$$

- 前進

$$\vec{F}^{ext} = \vec{F_1}^{ext} + \vec{F_2}^{ext} \neq 0$$

- ウィリーや縦ドリしない

$$\vec{N}^{ext} = \vec{r_1} \times (\vec{F_1}^{ext} + \vec{f_1}) + \vec{r_2} \times (\vec{F_2}^{ext} + \vec{f_2}) = 0$$
$$|\vec{F}| = \mu |\vec{f}|$$

$\vec{N}^{ext} = 0$ の条件の下で $\vec{F}^{ext}$ を最大にしたい。
重心をどこに置くか？ ⟵ 来週の小テスト.
(後輪駆動として)

来週休講