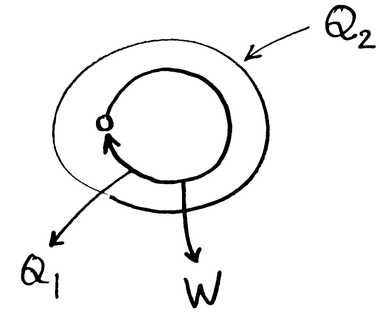
10/29(火) 熱力学 第4回

§.3 熱力学第2法則

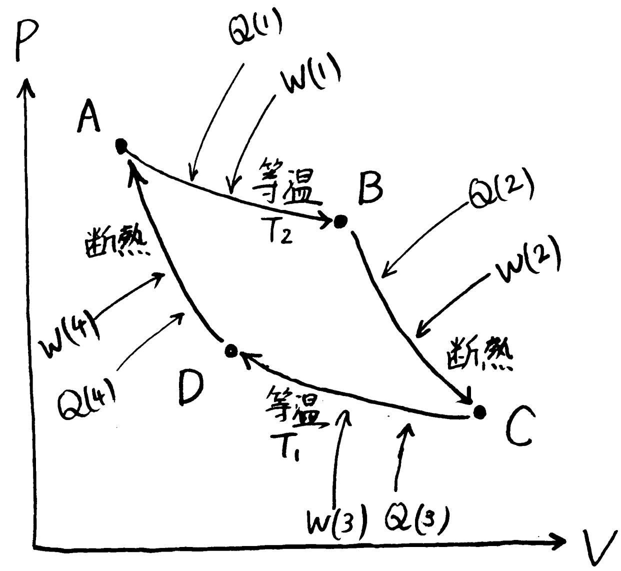
熱機関



第1種の永久機関 → 第1法則に反する。
〃 2 〃 → 〃 反しない。

$Q_2 = W + Q_1$
$W \neq Q_2$

§.3.2 カルノーサイクル



(1) $A \rightarrow B$

$$dU = d'Q + d'W$$
$$= d'Q - pdV \quad (\text{第1法則})$$

等温だから、$dU = 0$

$\therefore\ d'Q = pdV$, $d'Q = -d'W$

$$\therefore\ Q(1) = \int_{V_A}^{V_B} pdV$$
$$= nRT_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \quad \left(\because \text{理想気体の状態方程式 } p = \frac{nRT}{V} \text{ より}\right)$$
$$= nRT_2 \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} \ (>0) \quad (\because V_B > V_A)$$

また、$d'W = -d'Q$ より、

$$W(1) = -Q(1)$$
$$= nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} \ (<0)$$

→ 負なので矢印と仕事は逆向き

§.3 が終わったら
中間試験

(2) $B \to C$

第1法則より、$dU = d'Q + d'W = d'Q - pdV$

断熱だから、$d'Q = 0$

$\therefore dU = -pdV = d'W$

また、U は T のみの関数だから、

$(\because \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V)$

$$\boxed{dU} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = \boxed{C_V dT}$$

$\downarrow$ 0

$dU = C_V dT$ より、

$\therefore dU = -pdV = \boxed{d'W = C_V dT}$ （dU はいろいろな表し方がある）

$$\therefore W(2) = C_V \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$$= C_V(T_1 - T_2) < 0 \longrightarrow$$ 矢印と逆向き（外への仕事）

(3) $C \to D$

$dU = d'Q + d'W = d'Q - pdV$

等温だから、$dU = 0 \longrightarrow \boxed{d'Q = -d'W} = pdV = nRT_1 \frac{dV}{V}$

$$\therefore Q(3) = -W(3)$$

$$= nRT_1 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V}$$

$$= nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} \ (< 0) \longrightarrow$$ 矢印と逆向き（熱を出す）

(4) $D \to A$

$$dU = d'Q + d'W = d'Q - pdV$$

断熱だから、$d'Q = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{dU = d'W} = -pdV$

$$\boxed{dU} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = \boxed{C_V dT}$$

$$\therefore\ d'W = C_V dT \longleftarrow$$

$$\therefore\ W(4) = C_V \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$= C_V (T_2 - T_1) > 0$$ $\longrightarrow$ 矢印と同じ向き（外からの仕事）

4つの過程でのエネルギーの総決算

$$W = W(1) + W(2) + W(3) + W(4)$$

$$= nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_B} + C_V(T_1 - T_2) - nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C} + C_V(T_2 - T_1)$$

$$= nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_B} - nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C}$$

$$Q = Q(1) + Q(2) + Q(3) + Q(4)$$

$$= nRT_2 \ln\frac{V_B}{V_A} + 0 + nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C} + 0$$

$$= -\left(nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_B} - nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C}\right) \qquad (3.10)$$

熱効率 $\overset{イータ}{\eta} = \dfrac{W_{out}}{Q_{in}} = \dfrac{Q(1)+Q(3)}{Q(1)}$ を求めたい。

$$\begin{cases} Q(1) = nRT_2 \ln \dfrac{V_B}{V_A} & \text{—— ①} \\ Q(3) = nRT_1 \ln \dfrac{V_D}{V_C} & \text{—— ②} \end{cases}$$

log を消したい
(T だけの関数にしたい)

$dU = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \underbrace{\cancel{\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV}}_{\text{理想気体}} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = C_v dT$ より、

$dU = C_v dT$

第1法則より $dU = d'W + \underbrace{\cancel{d'Q}}_{\text{断熱}} = -pdV$

$\therefore\ pdV + C_v dT = 0$

$\dfrac{nRT}{V} dV + C_v dT = 0$ 　 $pV = nRT$

$(C_p - C_v) T \dfrac{dV}{V} + C_v dT = 0$ 　 $C_p - C_v = nR$

$\dfrac{C_p - C_v}{C_v} \cdot \dfrac{dV}{V} + \dfrac{dT}{T} = 0$

← 前回のノート

$\dfrac{C_p}{C_v} = \gamma$ として、

$(\gamma - 1) \dfrac{dV}{V} + \dfrac{dT}{T} = 0$

$(\gamma - 1) \displaystyle\int \dfrac{dV}{V} + \int \dfrac{dT}{T} = 0$

$(\gamma - 1) \ln V + \ln T = 0$

$\ln V^{\gamma - 1} T = \text{一定} = V_0^{\gamma - 1} T_0$

$\therefore\ V^{\gamma - 1} T = V_0^{\gamma - 1} T_0$ ← これは覚えてればいい話だけど

よって、$\left.\begin{aligned} V_B^{\gamma-1} T_2 &= V_C^{\gamma-1} T_1 \\ V_A^{\gamma-1} T_2 &= V_D^{\gamma-1} T_1 \end{aligned}\right\}$ 断熱変化時 　 $\therefore\ \dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{V_C}{V_D}$ —— ③ (3.11)

③より、①÷② をすると、$\dfrac{Q(1)}{Q(3)} = -\dfrac{T_2}{T_1}$ (3.12)

よって $\eta = \dfrac{Q(1)+Q(3)}{Q(1)} = 1 + \dfrac{Q(3)}{Q(1)} = 1 - \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} < 1$ (3.15)