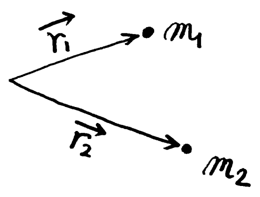
10/24(木) 力学2 第3回

○ 小テスト

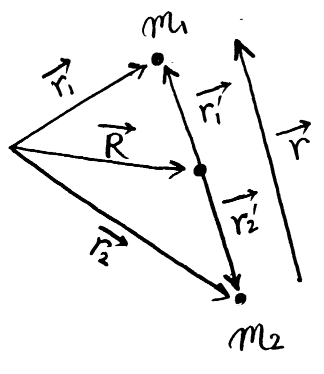
$\vec{r_1}$ に m_1，$\vec{r_2}$ に m_2 の質点がある。



1. 重心ベクトル $\vec{R}$ を求めよ。
2. $\vec{R}$ は $\vec{r_1}$ と $\vec{r_2}$ をつなぐ線上にあることを示せ。

1. $$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

2.



左図のように $\vec{r_1'}$，$\vec{r_2'}$，$\vec{r}$ を定めると、

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r_1'} &= \vec{r_1} - \vec{R} \\
&= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\vec{r_1} - \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \\
&= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}
\end{aligned}$$

同様に、 $$\vec{r_2'} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$\vec{r_1'}$，$\vec{r_2'}$（$\vec{R}$ と $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$ をつなぐ線）と $\vec{r}$（$\vec{r_1}$ と $\vec{r_2}$ をつなぐ線）が平行なのでOK.

○ 前回：2体系の相対運動

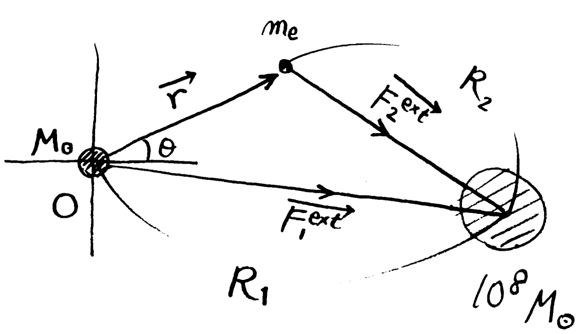
$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r_1}} = \vec{F_1}^{ext} + \vec{F_{12}}^{int} \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} = \vec{F_2}^{ext} + \vec{F_{21}}^{int} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \ddot{\vec{r_1}} = \dfrac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} + \dfrac{\vec{F_{12}}^{int}}{m_1} \\ \ddot{\vec{r_2}} = \dfrac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2} + \dfrac{\vec{F_{21}}^{int}}{m_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r_1}} - \ddot{\vec{r_2}} &= \frac{\vec{F_{12}}^{int}}{m_1} - \frac{\vec{F_{21}}^{int}}{m_2} + \frac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2} \\
&= \frac{\vec{F_{12}}^{int}}{m_1} + \frac{\vec{F_{12}}^{int}}{m_2} + \frac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2} \quad (\because \text{作用・反作用}) \\
&= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F_{12}}^{int} + \left(\frac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2}\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\vec{F_{12}}^{int} + \left(\frac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2}\right)
\end{aligned}$$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ とおくと、 $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} = \dfrac{1}{\mu}$

$$\therefore \quad \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F_{12}}^{int} + \underbrace{\mu\left(\frac{\vec{F_1}^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F_2}^{ext}}{m_2}\right)}_{\text{ここが消えると便利}} \qquad \vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

• 例：太陽のまわりの惑星の運動



$R_1 \simeq R_2$

$$\boxed{m_e}\,\ddot{\vec{r}} = F(r)\,\vec{r}$$

↓ 銀河の中心を考える

$$\boxed{\mu}\,\ddot{\vec{r}} = F(r)\,\vec{r}$$

$F(r) = -\dfrac{G M_\odot m_e}{r^2}$, $\quad G M_\odot m_e \to \alpha$

$$\mu = \frac{m_e M_\odot}{m_e + M_\odot} \xrightarrow[M_\odot \to \infty]{M_\odot \gg m_e} m_e$$

・ケプラーの第三法則をこれで考えると、

$$\tau^2 = \left(\frac{4\pi^2 \overset{\mu}{m_e}}{\underset{GM_\odot m_e}{\alpha}} \right) a^3 = \left(\frac{4\pi^2}{G(m_e + M_\odot)} \right) a^3$$

公転周期

これは置き換えない。

楕円の長半径

Q 二体系の保存量 $\vec{P}, E, \vec{L}$

○ 全運動量

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} = m\dot{\vec{r_1}} + m_2\dot{\vec{r_2}} = M\dot{\vec{R}}$$

・重心の運動量と見なせる。

・外力がなければ保存。 $\dot{\vec{P}} = \vec{F^{ext}}$

○ 全エネルギー

・全運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r_1}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r_2}}^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

証明できるよ

$M = m_1 + m_2$

$\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ を入れてみよう！

二体系なら、全運動エネルギーが重心と相対運動に分離できる。

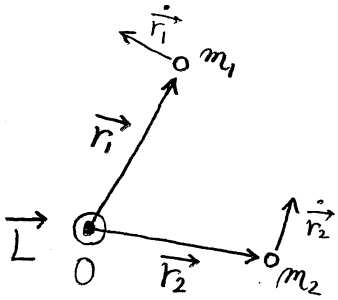
外力がなければ、

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}} + \left\{ \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}} + V^{int}_{(r)} \right\}$$

内力のつくるポテンシャル。

○ 全角運動量

原点を定める(原点によって値が変わる)



$$\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2)$$

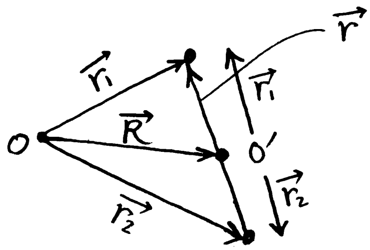
$$= M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

これも証明できる

○ メッセージ

二体系に限り、重心運動と相対運動を分離できる。

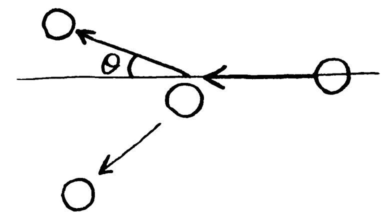
@ 重心系 : 重心Rを原点とする系



$$\vec{r_1'} \times \vec{r_2'} = 0$$

- 重心系の散乱角

  ⟶ 相対運動の散乱角と同じ(?)



- 多体系: n粒子系 〜 連続体

  全運動量・全角運動量で抽出される運動のみを考える。

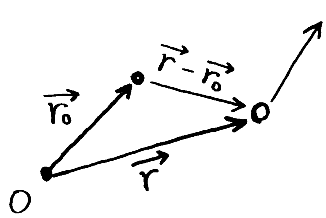
  - 全運動量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} = M\dot{\vec{R}}$$

時間変化

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F^{ext}} = \sum_i \vec{F_i^{ext}}$$

  - 全角運動量 : 基準点 $\vec{r_0}$



$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i (\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}})$$

基準点が動く可能性

時間変化

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \cancel{\sum_i (\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}}) \times m_i (\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}})}^{\,0} + \sum_i (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i (\ddot{\vec{r_i}} - \ddot{\vec{r_0}})$$

$$= \sum_i (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i \ddot{\vec{r_i}} + \ddot{\vec{r_0}} \times \sum_i m_i (\vec{r_i} - \vec{r_0})$$

外積の順序を逆に。

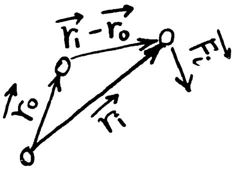
$$= \vec{N^{ext}} + \vec{N^{int}} + \ddot{\vec{r_0}} \times M(\vec{R} - \vec{r_0})$$

※ $\overrightarrow{N^{ext}} = \sum_i \left(\vec{r_i} - \vec{r_0}\right) \times \overrightarrow{F_i^{ext}}$ ： 外力のモーメント

↓

基準点のまわりの回転運動を発生させる。

$\overrightarrow{N^{int}} = \sum_i \left(\vec{r_i} - \vec{r_0}\right) \times \overrightarrow{F_i^{int}}$



力が平行のとき

$\vec{N} = 0$

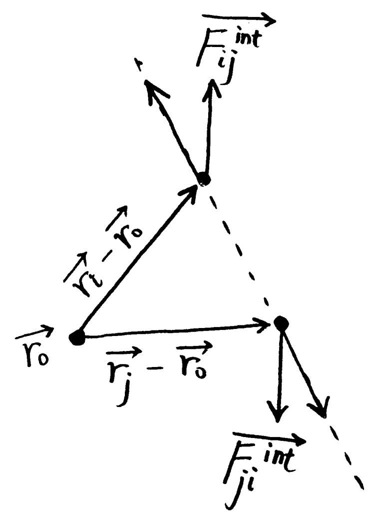
(中心力)

• 力のモーメントに対する内力の寄与

$$\overrightarrow{N^{int}} = \sum_i \left(\vec{r_i} - \vec{r_0}\right) \times \boxed{\overrightarrow{F_i^{int}}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \left(r_i - r_j\right) \times \overrightarrow{F_{ij}^{int}}$$

$$\sum_{j \neq i} \boxed{\overrightarrow{F_{ij}^{int}}} = 0$$

$$-\overrightarrow{F_{ji}^{int}}$$



$$\overrightarrow{N^{int}} = \sum_i \left(\vec{r_i} - \vec{r_0}\right) \times \sum_j \overrightarrow{F_{ij}}$$

$$= \sum_{(i,j)} \frac{1}{2}\left(\vec{r_i} \times \vec{F_{ij}} + \vec{r_j} \times \vec{F_{ji}}\right) - \vec{r_0} \times \vec{F_{ij}} - \vec{r_0} \times \vec{F_{ji}}$$

万有引力や静電場では $\overrightarrow{F_{ij}^{int}} \propto \left(r_i - r_j\right)$

$$\therefore \frac{d}{dt}\vec{L} = \overrightarrow{N^{ext}} + \ddot{\vec{r_0}} \times M\left(\vec{R} - \vec{r_0}\right)$$

基準点 $\vec{r_0}$ が $\begin{cases} \text{慣性系} & \ddot{\vec{r_0}} = 0 \\ \text{重心系} & \vec{r_0} = R \end{cases}$ であるとき、 $\frac{d}{dt}\vec{L} = \overrightarrow{N^{ext}}$