10/23(水) 微積分II 第7回

定理4.12 テイラーの定理(前ノート)

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j}\left(\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f\right)(a,b) + \frac{1}{m!}\left(\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\right)(a+\theta h, b+\theta k)$$

<u>例</u>　$m=2$ の場合に、$h=x-a$, $k=y-b$ として、
テイラーの定理の等式を書き下す。

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)\cdot(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)(x-a)(y-b) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)(y-b)^2 \right\} \end{aligned}$$

ここで f は C^2 級なので、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は連続。
$0<\theta<1$ だから、点(x,y)が点(a,b)に近ければ、点$\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)$
での値と点(a,b)での値はほとんど同じである。よって、
点(x,y)が点(a,b)に十分近いときに、次の2次近似式が得られる。

$$(*) \quad \begin{aligned} f(x,y) \fallingdotseq {} & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \right\} \end{aligned}$$

② 極値問題

定義

$\mathbb{R}^2$ の開集合 D において定義された関数 f が D の点 A において極大値をとるとは、

$$^\exists \varepsilon > 0,\ ^\forall p \in U_\varepsilon(A) : f(p) \le f(A)$$

であるときに言う。同様に、点 A において極小値をとるとは、

$$^\exists \varepsilon > 0,\ ^\forall p \in U_\varepsilon(A) : f(p) \ge f(A)$$

であるときに言う。極大値と極小値を合わせて極値という。

復習 ($n=1$ の場合)

関数 $f(x)$ について

① $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ ならば $x=a$ で極小 (グラフが下に凸)

② $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ ならば $x=a$ で極大 (グラフが上に凸)

$\downarrow$ グラフに頼らない

$f(x)$ のテイラー展開から得られる2次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

において、$f'(a)=0$ のとき、

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \boxed{\frac{f''(a)}{2}\underbrace{(x-a)^2}_{>0}}$$

x が a に近く、$x \neq a$ のとき。

a の近傍の値

この部分の正負で極大か極小かが決まる。

• 2変数関数の極値問題

__定理4.13__ (の言いかえ, p.147)

関数 $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合Dにおいて全微分可能とする。
Dの点 (a,b) において f が極値を持つとすると、
$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ が成り立つ。

(証明)

関数 $F(x)=f(x,b)$ は、$x=a$ において極値をもつ。
よって定理2.8より、$0=F'(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$
同様に、$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

○ 以下、C^2 級の関数 $f(x,y)$ の極値問題を考える。定理4.13より、

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

をみたす点 (a,b) は、f が極値をとる点の候補である。

☆ 極値をとるのはいつか？

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ のとき、
関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における2次近似式(＊)は、次のように書ける。

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{{}^t\boldsymbol{x}}_{(**)} \cdot \underbrace{H(f)(a,b)}_{\begin{pmatrix} ** \\ ** \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}}$$

ただし、

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad H(f)(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

この行列 $H(f)(a,b)$ を
関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) におけるヘッセ行列と言う。
f が点 (a,b) において極値をもつかどうかは、
「x が変化するときに ${}^t x H(f)(a,b) x$ の符号がどうなるか」で決まる。

$$
\begin{aligned}
&(X\ Y)\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= (X\ Y)\begin{pmatrix} pX+qY \\ qX+rY \end{pmatrix} \\
&= X(pX+qY) + Y(qX+rY) \\
&= pX^2 + 2qXY + rY^2
\end{aligned}
$$

☆ 2変数の2次形式

一般に、2次の対称行列 A に対して、X, Y を変数とする2次式

$$Q_A(X,Y) = (X\ Y)A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を、<u>A の定める2次形式</u>という。

定義

対称行列 A について

(1) A が正定符号（もしくは正定値）であるとは、

$$^{\forall}(X,Y) \neq (0,0) : Q_A(X,Y) > 0$$

(2) A が負定符号であるとは、

$$^{\forall}(X,Y) \neq (0,0) : Q_A(X,Y) < 0$$

(3) A が<u>不定符号</u>であるとは、

$$^{\exists}(X_1,Y_1), (X_2,Y_2) \neq (0,0) : Q_A(X_1,Y_1) > 0,\ Q_A(X_2,Y_2) < 0$$

※ (1)〜(3) のどれでもない場合がある。考えてみて！