10/8(火) 微積分II 第3回

@ 関数の極限(つづき)

関数の極限値は、点の近づき方によらずにある値に収束するときに定義される。

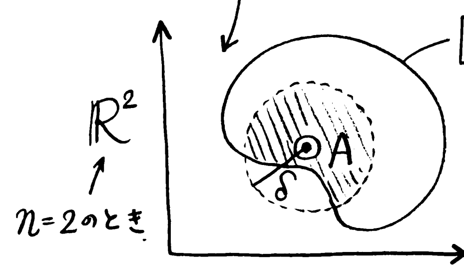
定義 (p.127の言いかえ。定理4.2)

関数fは$\mathbb{R}^n$の部分集合Dにおいて定義されているとする。
Dの点Aに対して、「$P\to A$とするときの$f(P)$の極限値がαである」とは、

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 : 「P\in D \text{ かつ } 0<d(P,A)<\delta」\Rightarrow |f(P)-\alpha|<\varepsilon$$

であるときに言う。このとき、

$\displaystyle\lim_{P\to A} f(P)=\alpha$ もしくは $f(P)\to\alpha\ (P\to A)$ と書く。



δをうまくとる。

関数の極限については、定理4.1 (p.128)が成り立つ。

@ 連続関数とその性質

定義 4.1 (p.129)

$\mathbb{R}^2$の部分集合Dにおいて定義されている関数fがDの点Aにおいて連続であるとは、

$\displaystyle\lim_{P\to A} f(P)=f(A)$ が成り立つときに言う。

関数fがDの各点において連続であるとき、
fはDにおいて連続であるという。

例 (1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

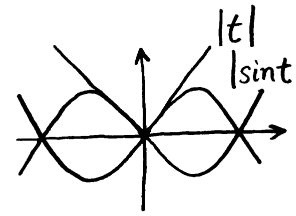
これは原点において連続ではない。

(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

これは原点において連続である。

(証明)(2)



任意の実数 t に対し、$|\sin t| \leq |t|$ が成り立つ。

また、$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$ なので、

$(x,y) \neq (0,0)$ のとき、

大きく

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y|$$

小さく

であり、$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$y \to 0$ なので、

はさみうちの原理より、$(x,y) \to (0,0)$ のとき $|f(x,y)| \to 0$

したがって、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ //

- 定理4.1 から、定理4.3 (p.129) が従う。

  ↑

  連続関数を $+ - \times \div$ しても連続

☆ 次の定理は、実数の連続性公理から従う。

定理 4.4 (1) p.130

$\mathbb{R}^n$ の(空でない)有界閉集合 D において連続な関数は、D において最大値・最小値をもつ。

ⓐ 全微分と偏微分 ($n=2$ の場合)

<u>復習</u> 1変数関数 $f(x)$ が点 a において微分可能であるとは、

$$f(x) = \underbrace{f(a) + A(x-a)}_{\text{1次関数}} + o(|x-a|) \quad (x \to a)$$

となる定数 A が存在すること。

(このとき、$A = f'(a)$ である)

誤差 ($|x-a|$ よりも速く 0 に収束)

これを2変数に拡張する:

<u>定義</u> p 133

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍によって定義されていて、

$$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) \quad ((x,y) \to (a,b))$$

となるような定数 α, β が存在するとき、 (＊)

関数 f は点 (a,b) において全微分可能 (もしくは 微分可能) であるという。

<u>補足</u>

$\psi(x,y) = o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) \quad ((x,y) \to (a,b))$ とは、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\psi(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

となること。(ランダウの o 記号)

☆ (＊) の意味

- 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍において、
  1次関数 $f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)$ で近似されている。

- その誤差は点 (a,b) との距離 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ よりも高次の無限小である。

○ 偏微分

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において全微分可能であるときに、

(*) の定数 α, β を求めたい。

ランダウの o 記号の定義から、(*) は次と同値。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y) - f(a,b) - \alpha(x-a) - \beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \right| = 0.$$