10/2(水) 微積分Ⅱ 第2回

• 近傍

定義 (p.125) $\mathbb{R}^n$ の点 P と部分集合 W について、
W が点 P の近傍であるとは、P が W の内点であるときにいう。

例 $n=2$ のとき

W は P の近傍　　　　W は P の近傍でない

• 開集合、閉集合、閉包

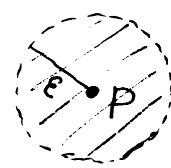
定義 (p.125) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D について

(1) D の任意の点が D の内点であるとき、D は開集合であるという。

(2) $\partial D \subset D$ であるとき、D は閉集合であるという。 ← いくつかやり方はあるけど…

例 $n=2$ のとき

(主張) $\mathbb{R}^2$ の $\boxed{\text{点 P の } \varepsilon\text{-近傍}}$ は開集合である。



$U_\varepsilon(P)$

(証明) $U_\varepsilon(P)$ の点 A を任意にとる。

$\boxed{C = \frac{1}{2}\left(\varepsilon - d(A,P)\right)}$ とおくと $C > 0$ である。 ← $C < \varepsilon - d(A,P)$ なら何でもいいけどてきとうに $\frac{1}{2}$ にする。

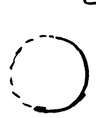
このとき $\boxed{U_C(A)} \subset \boxed{U_\varepsilon(P)}$ がなりたつ。

よって A は $U_\varepsilon(P)$ の内点である。

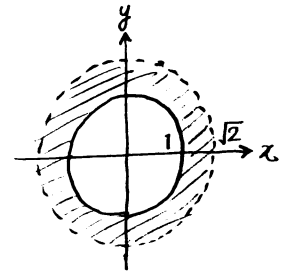
したがって $U_\varepsilon(P)$ は開集合である。

$U_\varepsilon(P)$ の任意の点が $U_\varepsilon(P)$ の内点であることを示す。
↑
第1回 3ページ
$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \subset D$

注意 開集合でなければ閉集合であるというのは間違い。



定義(p.125)　$\mathbb{R}^n$の部分集合Dについて
$D \cup \partial D$ をDの閉包といい、$\overline{D}$で表す。　closure



例　$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$ のとき、
$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

基本的な事実　教科書の証明を見ること

$\mathbb{R}^n$の部分集合Dについて

① Dが開集合 $\Longleftrightarrow$ $D = \mathring{D}$

② Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus D$が開集合

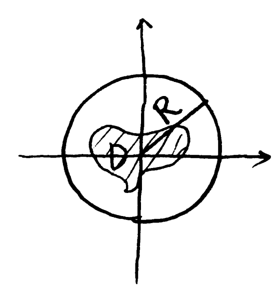
③ Dが閉集合 $\Longleftrightarrow$ $D = \overline{D}$

④ $\mathring{D}$は開集合

⑤ $\overline{D}$は閉集合

- 有界

定義(p.126)　$\mathbb{R}^n$の部分集合Dについて
(十分大きな)正の数Rが存在して、
$U_R(0) \supset D$ となるとき Dは有界であるという。
(0: 原点)



例　$n=2$のとき

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$ は有界.

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x+y < 2\}$ は有界でない。

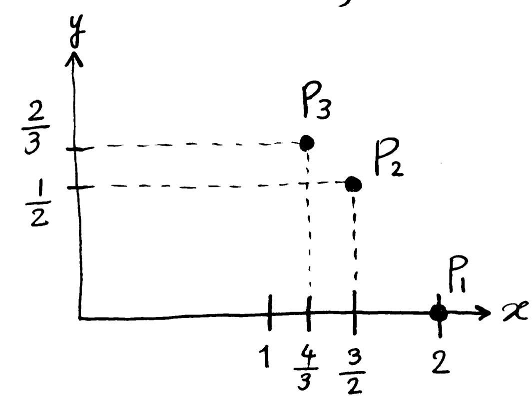
・点列の収束

定義 (p.126) $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ が点Aに収束するとは、
$d(P_j, A) \to 0 \quad (j \to \infty)$ となるときにいう。
このとき、$\lim_{j\to\infty} P_j = A$ もしくは $P_j \to A \ (j \to \infty)$ と表し、
点Aは点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ の極限点であるという。

例 (問題) $n = 2$ のとき、
$P_j = \left(1+\frac{1}{j},\ 1-\frac{1}{j}\right) \ (j = 1, 2, \ldots)$ で定まる点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ について

(証明)

$$d(P_j, A) = \sqrt{\left(1+\frac{1}{j}-1\right)^2 + \left(1-\frac{1}{j}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{j} \to 0 \quad (j \to \infty)$$



命題 (p.126)

$1+\frac{1}{j} \to 1,\ 1-\frac{1}{j} \to 1$
になるんだから、距離の定義は大袈裟では？

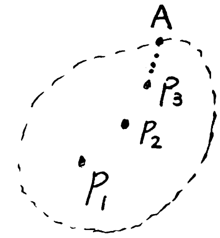
$\mathbb{R}^n$ の点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ の各点 P_j の座標を
$P_j = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ とおく。このとき次の(a), (b)は同値である。

(a) $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ は点 $A = (a_1, \ldots, a_n)$ に収束する。 ← 距離による定義

(b) $\lim_{j\to\infty} x_1^{(j)} = a_1, \ \ldots, \ \lim_{j\to\infty} x_n^{(j)} = a_n$ ← 各成分が収束する

(証明の概略)

(b)→(a) は易しい。
(a)→(b) は $k = 1, 2, \ldots, n$ について
$0 \leq |x_k^{(j)} - a_k| \leq d(P_j, A)$ が成り立つことを使って示せる。



基本的な事実(つづき)

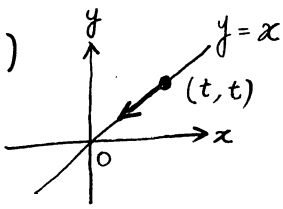
⑥ Dの点列が収束するならば、その極限点は$\overline{D}$に属する。

◎ 関数の極限

例 $(n=2)$

$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ の値は $(x,y)\to(0,0)$ のとき、どのようにふるまうか?

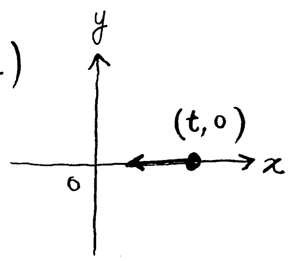
(1)



このように近づくとき、

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{2t^2} = 1$$

(2)



このように近づくと、

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2} = 0$$

このように、$n\geq 2$ のときは点の近づき方によって
極限値が変わったり存在しなくなったりする。