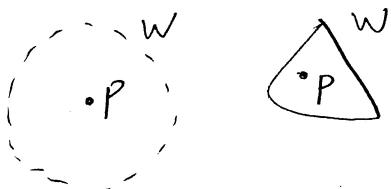
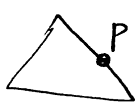
• 近傍

<u>定義</u>(p.125) $\mathbb{R}^n$の点Pと部分集合Wについて、
Wは点Pの近傍であるとは、
PがWの内点であるときにいう。

<u>例</u> $n=2$のとき



Wは Pの近傍



Wは Pの近傍でない

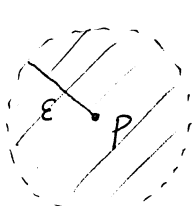
• 開集合、閉集合、閉包

<u>定義</u>(p.125) $\mathbb{R}^n$の部分集合Dについて

(1) Dの任意の点がDの内点であるとき、Dは開集合であるという。

(2) $\partial D \subset D$であるとき、Dは閉集合であるという。 ← いくつかやり方はあるけど‥

<u>例</u> $n=2$のとき
$\mathbb{R}^2$の点Pのε−近傍は開集合である。



$U_\varepsilon(P)$

(証明) $U_\varepsilon(P)$ の点Aを任意にとる。

$C = \frac{1}{2}\left(\varepsilon - d(A,P)\right)$ とおくと、$C>0$ である。

このとき、$U_C(A) \subset U_\varepsilon(P)$ がなりたつ。

よって A は $U_\varepsilon(P)$ の内点である。

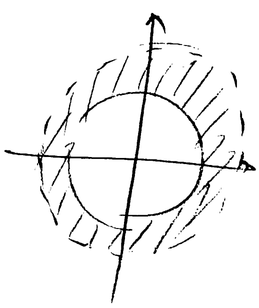
したがって $U_\varepsilon(P)$ は開集合である。

開集合でなければ
閉集合ではないという
ことはない。

定義 (p.125)　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D について

$D \cup \partial D$ を D の閉包といい、$\overline{D}$ で表す　closure

例　$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$



のとき、$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

基本的な事実　教 証明

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D について

① D が開集合 $\iff D = D^\circ$

② D が閉集合 $\iff \mathbb{R}^n \setminus D$ が開集合

③ D が閉集合 $\iff D = \overline{D}$

④ D° は開集合

⑤ $\overline{D}$ は閉集合

• 有界

定義 (p.126) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D について

(十分大きな) 正の数 R が存在して、

$U_R(0) \supset D$ となるとき D は有界であるという。

原点

例 $n=2$ のとき

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$ は有界

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x+y < 2\}$ は有界でない。

× 点列の収束

定義 (p.126) $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ が 点 A に収束するとは、

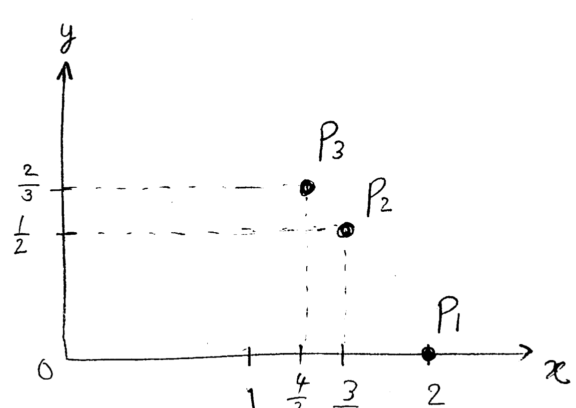
$d(P_j, A) \to 0 \quad (j \to \infty)$ となるときにいう。

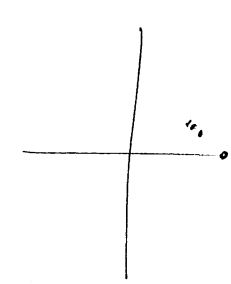
このとき、$\lim_{j\to\infty} P_j = A$ もしくは $P_j \to A \ (j\to\infty)$

と表し、点 A は、点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ の極限点であるという。

例 $n=2$ のとき、

$P_j = \left(1+\frac{1}{j}, 1-\frac{1}{j}\right) \quad (j=1,2,\dots)$ で定まる点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ について





$$d(P_j, A) = \sqrt{\left(1+\frac{1}{j}-1\right)^2 + \left(1-\frac{1}{j}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{j^2}} = \frac{\sqrt{2}}{j} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

より、点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ は A に収束する.

おおげさ？
各成分が1に
収束するから...

<u>命題</u> (p.126) R^nの点列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ の各点P_jの座標で

$P_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ とおく。

このとき次の(a),(b)は同値である.

(a) $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ は点$A = (a_1, \dots, a_n)$ に収束する

(b) $\lim_{j\to\infty} x_1^{(j)} = a_1, \dots, \lim_{j\to\infty} x_n^{(j)} = a_n$

(証明の概略)

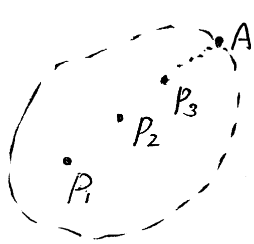
(b) → (a) は易しい

(a) → (b) は、$k = 1, 2, \dots, n$ について

$0 \leq |x_k^{(j)} - a_k| \leq d(P_j, A)$ がなりたつことを使って示せる

☆ 基本的な事実(つづき)

⑥ Dの点列が収束するならば、その極限点は $\overline{D}$ に属する



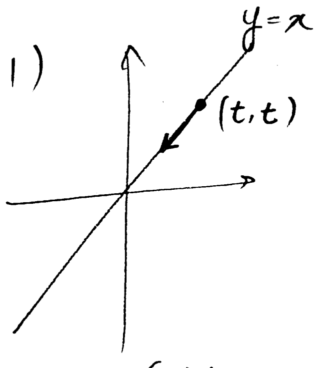
この先生何に付たんとうしてるんだろう？

◎ 関数の極限

例 $(n=2)$

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$ の値は、$(x,y)\to(0,0)$ のとき どのようにふるまうか？

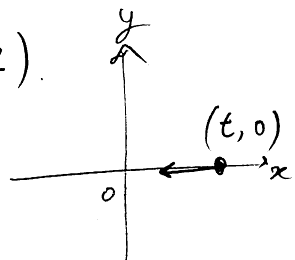
(1)



このように近づくとき

$$\lim_{t\to0} f(t,t) = \lim_{t\to0} \frac{2t^2}{2t^2} = 1$$

(2)



このように近づくと

$$\lim_{t\to0} f(t,0) = \lim_{t\to0} \frac{0}{t^2} = 0$$

このように $n\geq 2$ のときは、点の近づき方によって

極限値が変わったり、存在しなくなったりする。