10/1 (火) 微積分II 第1回

- 秋学期にやること

① 多変数関数の微積分 (20回) ← 定義域がn次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ の部分集合であるような関数を扱う。(特に $n=2$ の場合を主に考える。)

② 関数列、関数項級数の理論 (10回)

<u>例</u> $(n=2)$

$f(x, y) = 2x + 3y + 4$ は、2変数関数。

<u>例</u> (n: 一般)

$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ は、n変数関数。

<u>注意</u> $n=2$ の場合は関数のグラフ $z = f(x, y)$ を図で描ける。

<u>例</u> $f(x, y) = 2x + 3y + 4$ のグラフ

$z = 2x + 3y + 4$ は、xyz平面内の平面となる。

§.4 多変数関数の微分法

◎ $\mathbb{R}^n$ の点集合

$\mathbb{R}^n$ の距離とその性質

<u>定義</u> (p.124)

$\mathbb{R}^n$ の点 $P=(x_1,\dots,x_n)$ と $Q=(y_1,\dots,y_n)$ の距離 $d(P,Q)$ を次で定める。

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)}$$

<u>命題</u> (p.124)　$\mathbb{R}^n$ の距離について、次のことが成り立つ。

P, Q, R を $\mathbb{R}^n$ の点とするとき、

(1) $d(P,Q) \geq 0$　等号成立は $P=Q$ のときのみ

(2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(3) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

<u>補足</u>　(3) を三角不等式と呼ぶ。

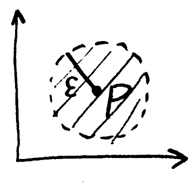
- 内点、外点、境界点

<u>定義</u> (p.124)　$\mathbb{R}^n$ の点 P と正の数 ε に対して、

$U_\varepsilon(P) = \{ A \in \mathbb{R}^n \mid d(A,P) < \varepsilon \}$ で定まる

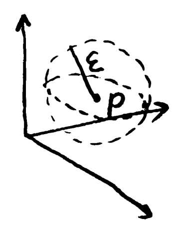
$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $U_\varepsilon(P)$ を、点 P の ε-近傍と言う。

<u>例</u> (1) $n=2$ のとき



$U_\varepsilon(P)$ は、
点 P を中心とする
半径 ε の"ふちのない円板"
(開円板)

(2) $n=3$ のとき



$U_\varepsilon(P)$ は、
点 P を中心とする半径 ε の
"表面を含まない球"
(開球)

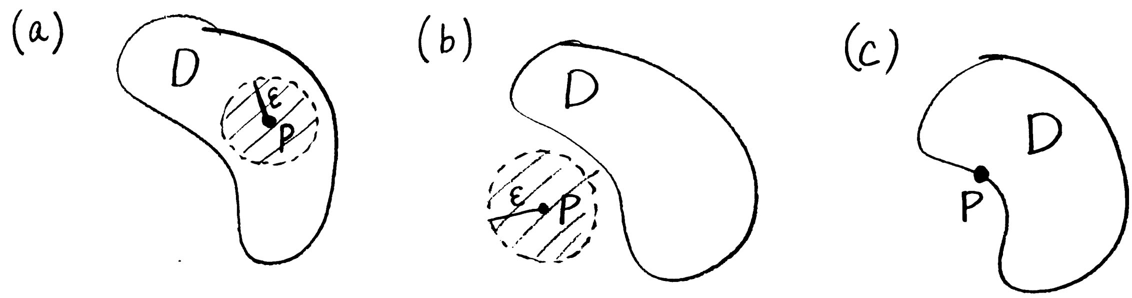
- $\mathbb{R}^n$の点Pと部分集合Dが与えられたとき、次の(a)〜(c)のただ1つが成り立つ。

(a) $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \subset D$

(b) $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus D$ ← $\boxed{\mathbb{R}^n\text{からDを除いた集合(差集合)}}$

(c) $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \cap D \neq \phi$ かつ $U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \phi$

∘ $n = 2$のときは、



<u>定義</u> (p.125) 以上の記号を使って、

(a)のとき、点PをDの<u>内点</u>

(b) 〃 <u>外点</u>

(c) 〃 <u>境界点</u> であるという。

∘ $\mathbb{R}^n$の部分集合Dに対し、
Dの内点全体のなす集合をDの内部といい、$\overset{\circ}{D}$で表す。(外部も同様)
Dの境界点全体のなす集合をDの境界といい、∂Dで表す。

<u>例</u> (p.125 問4.2(1))

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 < 2 \right\}$$ について

↓

$$\overset{\circ}{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2 + y^2 < 2 \right\}$$

$$\partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \text{ または } x^2 + y^2 = 2 \right\}$$