・秋

① 多変数の微積分 (20) ← 定義域がn次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ の部分集合であるような関数を扱う（特に $n=2$ の場合を主に考える）

② 関数列，関数項級数の理論

例 $(n=2)$

$f(x,y) = 2x + 3y + 4$ は2変数関数

例 (n：一般)

$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ はn変数関数

注意　$n=2$ の場合は関数のグラフ $z = f(x,y)$ も図で描ける

例　$f(x,y) = 2x + 3y + 4$ のグラフ

$z = 2x + 3y + 4$ は、xyz空間内の平面となる

3.4 多変数関数の微分法

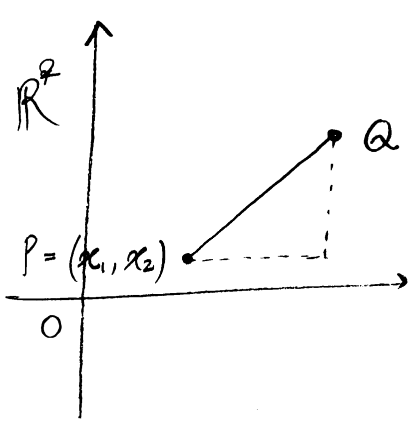
① $\mathbb{R}^n$の点集合

$\mathbb{R}^n$の距離とその性質

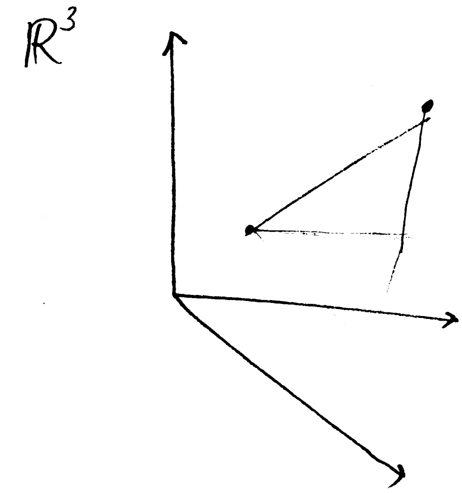
定義 (p.124) $\mathbb{R}^n$の点 $P=(x_1,\dots x_n)$ と $Q=(y_1,\dots,y_n)$ の距離 $d(P,Q)$ を次で定める。

$$d(P,Q)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$$

例 $n=2$の場合



$n=3$の場合



命題 (p.124) $\mathbb{R}^n$の距離について次のことが成り立つ：

P,Q,R を $\mathbb{R}^n$の点とするとき

(1) $d(P,Q)\geq 0$ 等号成立は $P=Q$ のときのみ

(2) $d(P,Q)=d(Q,P)$

(3) $d(P,R)\leq d(P,Q)+d(Q,R)$

補足 (3)を三角不等式と呼ぶ

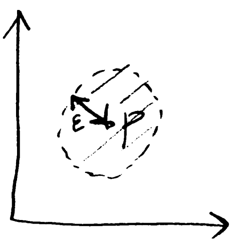
• 内点, 外点, 境界点

<u>定義</u> (p.124) $\mathbb{R}^n$ の点Pと正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid d(A,P) < \varepsilon\}$$ で定まる

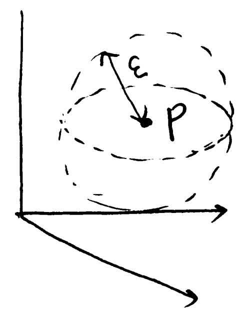
$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $U_\varepsilon(P)$ を点Pの ε-近傍という。

<u>例</u> (1) $n=2$ のとき



$U_\varepsilon(P)$ は、点Pを中心とする半径 ε の「ふちのない円板」(開円板)

(2) $n=3$ のとき



点Pを中心とする半径 ε の「表面を含まない球」(開球)

• $\mathbb{R}^n$ の点Pと部分集合Dが与えられたとき、次の(a)-(c)のうちただ1つが成り立つ

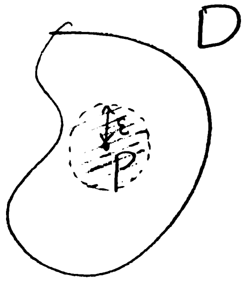
(a) $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \subset D$

(b) $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus D$ ← $\mathbb{R}^n$ からDを除いた集合 <u>差集合</u>

(c) $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(P) \cap D \neq \emptyset$ かつ $U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$

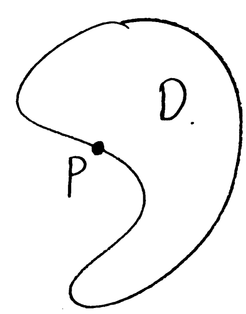
$n=2$ のときは.

(a)



(b)

(c)



定義 (p.125) 以上の記号を使って、

(a) のとき、点 P を D の内点、

(b) 外点

(c) 境界点

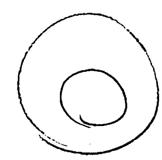
であるという。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D に対し、D の内点全体のなす集合を D の内部といい、$\mathring{D}$ で表す。

D の境界点全体のなす集合を D の境界といい、∂D で表す。

例 (p.125 問題2(1))

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \overset{<}{\cancel{\leq}} 2\}$$ について、



$$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 2\}$$

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \text{ または } x^2+y^2=2\}$$