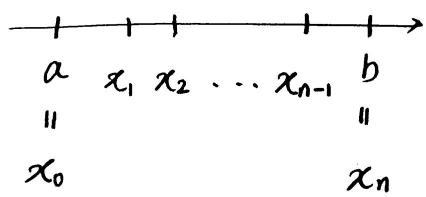
0 連続関数のリーマン積分可能性

有界閉区間 $I = [a,b]$ におけるリーマン積分可能性の定義を復習しよう。
以下、関数 f は I において有界とする。

I の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ に対し、



$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

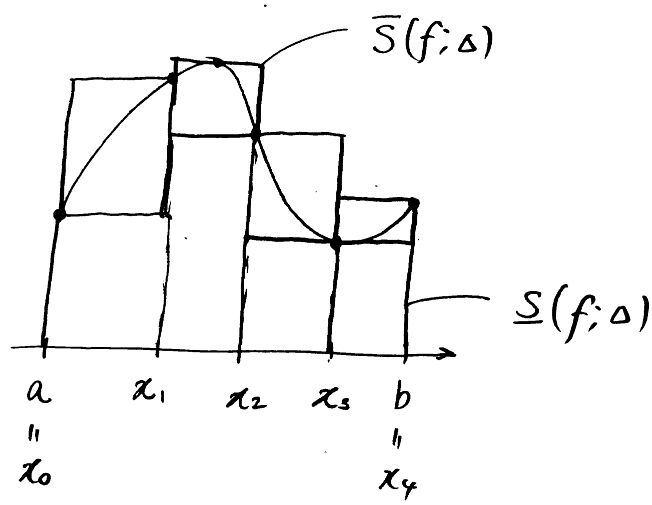
$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

とおいて、

$$\underline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{(不足和)}$$

$$\overline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{(過剰和)}$$

と定める。



これらの値を、Iのすべての分割について考えて、

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f;\Delta) \mid \Delta は I の分割\}$$

$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f;\Delta) \mid \quad 〃 \quad\}$$

と定める。

このとき $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ が成り立つ。

この不等式において等号がなりたつ、すなわち、

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

であるとき、f は I においてリーマン積分可能であるという。

以上の記号を使って、リーマン積分可能性の条件を言いかえる。

定理 9.1（のいいかえ，p.285）

関数 f は有界閉区間 $I = [a,b]$ において有界であるとする。

このとき、

f が I においてリーマン積分可能であることと、次の条件は同値である。

(条件)

任意の正の数 ε に対し、I のある分割 Δ が存在して、

$$\overline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$$

が成り立つ。（証明は教科書を見よ）

定理9.1を使って、次の定理9.2を証明しよう。

定理9.2 (p.286)

関数fが有界閉区間$I=[a,b]$において連続ならば、
fはIにおいてリーマン積分可能である。

(証明)

関数fは有界閉区間Iにおいて連続なので、
最大値・最小値をもつ。特に有界である。
定理9.1を使って、fはIにおいてリーマン積分可能であることを示そう。

正の数εを任意にとる。
関数fは有界閉区間Iにおいて連続だから、
Iにおいて一様連続である。(定理8.4)
したがって、ある正の数δが存在して、

「$x, y \in I$ かつ $|x-y| < \delta$」 $\Longrightarrow$ $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ――(*)

が成り立つ。

そこで、Iの分割$\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$を、

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}| < \delta$$

が成り立つようにとる。
このΔについて、$\overline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$が成り立つことを示そう。

各閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\dots,n)$ においても f は連続だから、
最大値・最小値をもつ。
この最大値を M_i，最小値 m_i とし、
これらの値をとる $\underbrace{\text{点を}}_{\text{ひとつとって、}}$ それぞれ ξ_i，η_i とする。

このとき、

$$f(\xi_i) = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = M_i$$

$$f(\eta_i) = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = m_i$$

である。さらに、

$$|\xi_i - \eta_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta$$

なので、(*) より、

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| = |M_i - m_i| = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

がなりたつ。
よって、

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{正}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) \\
&\qquad = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&\qquad = \frac{\varepsilon}{b-a}(\underset{\uparrow b}{x_n} - \underset{\uparrow a}{x_0}) \\
&\qquad = \varepsilon
\end{aligned}$$

よって、$\overline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta) < \varepsilon$ が成り立つ。

以上より、定理9.1から、f は I においてリーマン積分可能である。