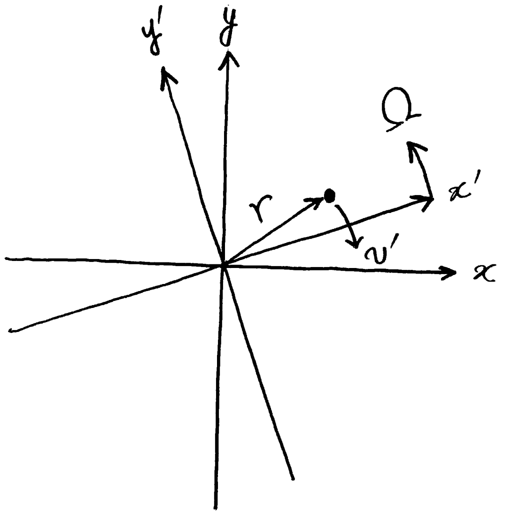
(つづき)

$\dot{\Omega} = 0$ の場合

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + 2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{r}_\perp\Omega^2 \quad \text{——— (11)}$$

(例) 静止した点を回転系から見る。



$$\boldsymbol{a}' = 2\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{r}_\perp\Omega^2$$

$$\boldsymbol{v}' = \underbrace{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega}}$$

これはΩと垂直より、$|\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\Omega}| = v\Omega$

$v \to r\Omega$

$$v' = r\Omega$$

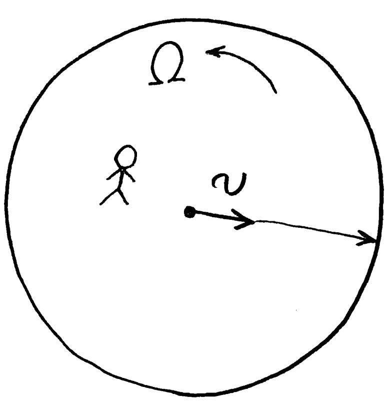
$$a' = -2r\Omega\cdot\Omega + r\Omega^2$$

$$= -r\Omega^2 \quad \text{(見かけの加速度)}$$

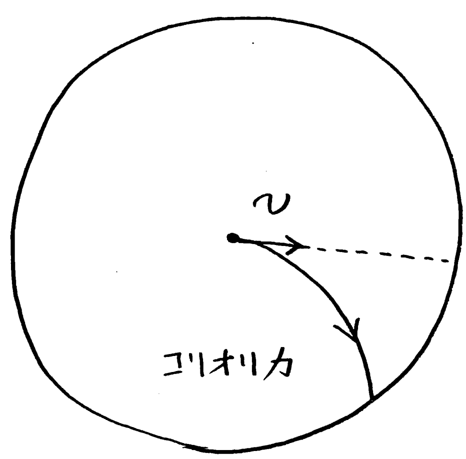
↑

向心加速度

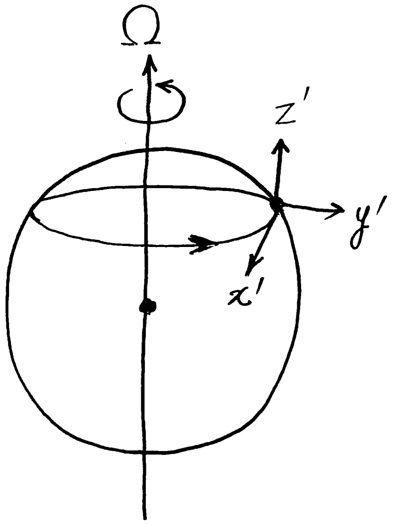
回転円盤上の小球(摩擦なし)

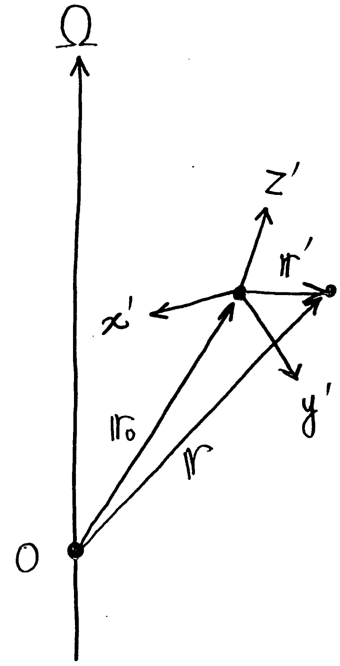


円盤に乗った人が見ると、



○ 原点を通らない、軸周りの座標系の回転





$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\mathbf{v} \quad \mathbf{v}' \quad \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}' \quad ?$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'$$
$$= \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{a}' - 2\mathbf{v}'\times\boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\times\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \quad \text{—} (13)$$

?

前回ノートの
(8)'

○ 地表に乗った座標系では、

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{一定}, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$$

⑬より、

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}_0 + \boldsymbol{a}' - 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)) \quad \text{—— ⑭}$$

原点は地球回転に乗っているから、

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_0$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_0$$

$$= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_0) \quad \text{—— ⑮}$$

⑭, ⑮より、

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' - 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\Omega} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})}_{-\boldsymbol{r}_\perp \Omega^2} \quad \text{—— ⑯}$$

$$\therefore m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{r}_\perp \Omega^2 \quad \text{—— ⑰}$$

地表からの距離が小さいとき、

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \ll |\mathbf{r}_0|$$

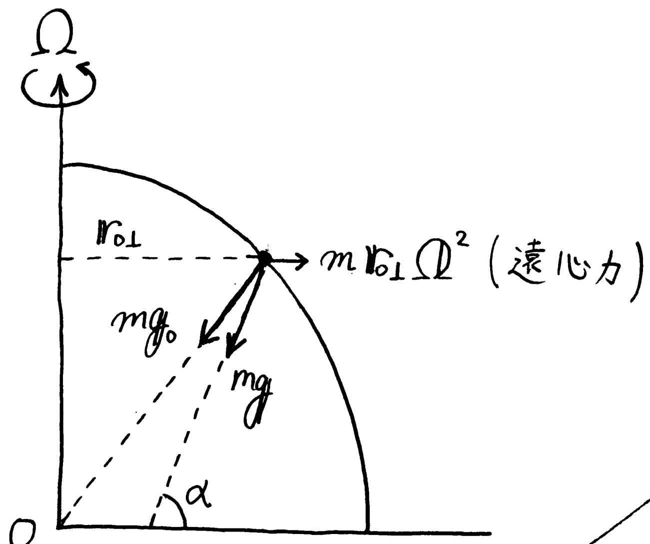
$$\therefore\ |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'| \simeq |\mathbf{r}_0|$$

このとき、⑰は、

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + 2m\mathbf{v}'\times\boldsymbol{\Omega} + m\mathbf{r}_{0\perp}\Omega^2 \quad \text{―――― ⑱}$$

重力 $m\mathbf{g}_0$ を加えて、

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + 2m\mathbf{v}'\times\boldsymbol{\Omega} + m\mathbf{r}_{0\perp}\Omega^2 + m\mathbf{g}_0 \quad \text{―――― ⑲}$$

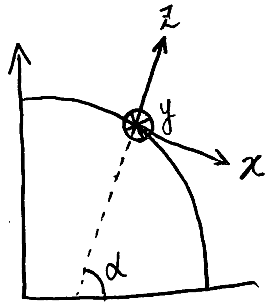


$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{r}_{0\perp}\Omega^2 \quad \text{―――― ⑳} \quad (\text{合力})$$

$\mathbf{g}$ の方向を"鉛直方向"と定義する。

α: 天文緯度

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + 2m\mathbf{v}'\times\boldsymbol{\Omega} \quad \text{―――― ㉑}$$



地表で、鉛直上向きを z 軸,
子午面南向きを x 軸,
垂直東向きを y 軸とすれば、(21) は、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\Omega\dot{y}\sin\alpha \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\Omega(\dot{x}\sin\alpha + \dot{z}\cos\alpha) \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\Omega\dot{y}\cos\alpha \end{cases} \quad \text{—— (22)}$$

(地表の運動方程式)

地球回転

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$$

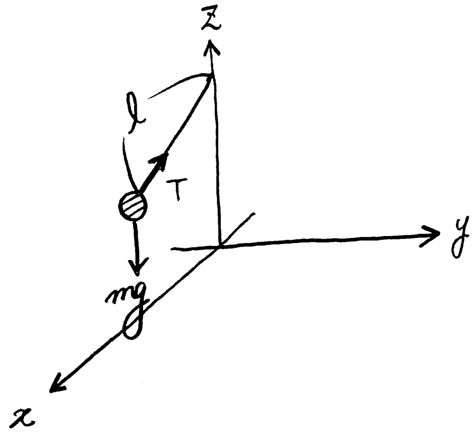
つくばの緯度 $\theta = 36.04^\circ$

$$r_{0\perp} = R\cos\theta = 6378\,\mathrm{km} \times 0.81 = 5160\,\mathrm{km}$$

$$\therefore\ r_{0\perp}\Omega^2 = 0.03\ \mathrm{m/s^2}$$

○ フーコーの振り子

1851年　パンテオン(パリ)



長さ　67m

重り　28kg

約32時間で振動面が1回転

張力をTとすると、

$$
\begin{cases}
F_x = -T\dfrac{x}{l} \\
F_y = -T\dfrac{y}{l} \\
F_z = -T\dfrac{z-l}{l}
\end{cases}
$$

このとき㉒は、

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} = -T\dfrac{x}{l} + 2m\Omega\dot{y}\sin\alpha & \text{—— (1)} \\
m\ddot{y} = -T\dfrac{y}{l} - 2m\Omega(\dot{x}\sin\alpha + \dot{z}\cos\alpha) & \text{—— (2)} \\
m\ddot{z} = -T\dfrac{z-l}{l} - mg + 2m\Omega\dot{y}\cos\alpha & \text{—— (3)}
\end{cases}
$$