○ 中間値の定理

<u>命題</u>　Aを定数とする。数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束するとする。このとき、

(1) $\forall n : a_n \leq A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leq A$

(2) $\forall n : a_n < A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leq A$

(3) $\forall n : a_n \geq A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \geq A$

(4) $\forall n : a_n > A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \geq A$

<u>注意</u>　$\forall n : a_n < A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < A$

は一般には正しくない。

反例：$a_n = 1 - \frac{1}{n}$，$A = 1$

定理7.7(1)の一部 (p.266)

関数fが点aにおいて連続で、
数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がaに収束するならば、
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つ。

この命題と定理を使って、中間値の定理を証明しよう。

定理8.1 (p.277)

関数fが$\overbrace{\text{閉区間}}^{[a,b]}$において連続で、$f(a) \neq f(b)$ ならば、
関数fは$f(a)$と$f(b)$の間にあるすべての数を値としてとる。
つまり、$f(a)$と$f(b)$の間にある任意の数kに対して、
開区間(a, b)のある点cが存在して、$f(c) = k$ が成り立つ。

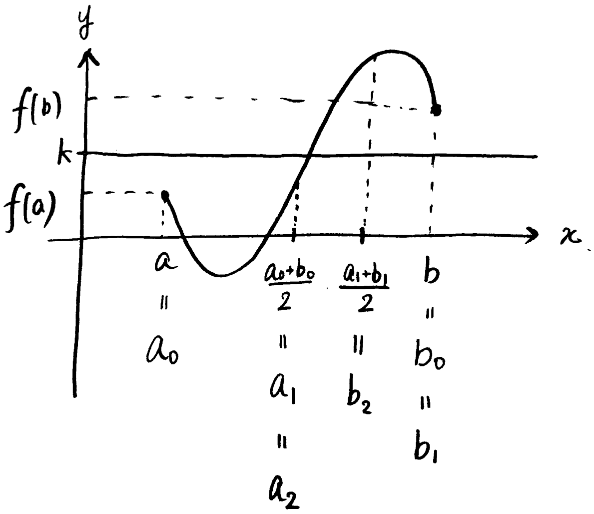
(証明)

$f(a) \neq f(b)$ なので、

$f(a) < f(b)$ もしくは $f(a) > f(b)$ のいずれかである。

ここでは、$f(a) < f(b)$ の場合に証明する。

($f(a) > f(b)$ のときも同様にできる).



数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{b=0}^{\infty}$ を次のように定める。

$a_0 = a$, $b_0 = b$ として、

$$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \quad \text{のときは、} \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \quad \text{のときは、} \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

この定め方から次のことが成り立つ。

(1) $\forall n :\ a_n \leq b$ かつ $b_n \geq a$

(2) $\{a_n\}$ は広義単調増加

$\{b_n\}$ は広義単調減少

(3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

(4) $f(a_n) < k \leq f(b_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(1), (2) より、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束する。 ← 有界かつ単調

さらに、(3) から、

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0.$$

なので、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ値に収束する。

この値を c とする。

(1) より、 $a \leq c \leq b$ である。

(4) と定理7.7 から、 (ここで f の連続性を使っている)

$$f(c) \leq k \leq f(c)$$

命題

(< ではない!)

よって $f(c) = k$. である。

$k \neq f(a), f(b)$ なので、 $c \neq a, b$

したがって、点 a は開区間 (a, b) にあって、$f(c) = k$ をみたす。//

○ 一様連続性

<u>定義</u> $\mathbb{R}$ の部分集合 D において定義された関数が、
<u>D において一様連続</u> であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :$$

$$x, y \in D \text{ かつ } |x - y| < \delta$$

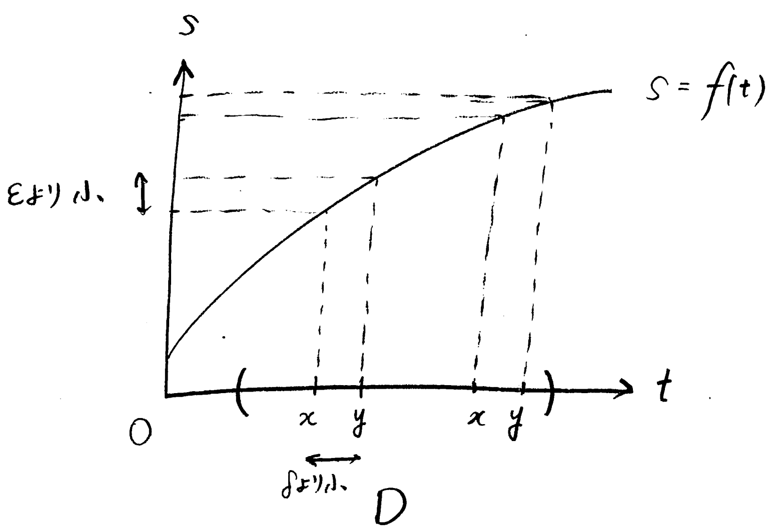
$$x \in D \text{ かつ } |x - a| < \delta$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

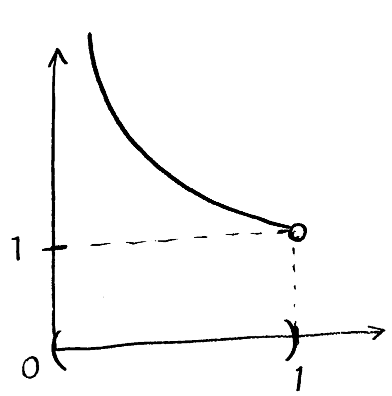
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

関数が<u>点 a において</u>連続

であるときにいう。



例. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $D = (0, 1)$ において一様連続ではない。



補足 「一様連続でない」の定義

「一様連続」の(正確な)定義

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in D : |x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

(P → Q)

これの否定は、

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in D : |x-y| < \delta \text{ かつ } |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$$

(P かつ $\overline{Q}$)

定理8.4 (p.279)

有界閉区間において連続な関数は、
この閉区間において一様連続である。

(証明)

関数 f は有界閉区間 $I=[a,b]$ において連続であるとする。

f は I において一様連続であることを、背理法で示そう。

f は I において一様連続でないと仮定する。このとき、

正の数 ε で次の条件をみたすものがある。

(条件) 任意の正の整数 n に対し、

I の点 x_n, y_n であって、

① $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ ②

をみたすものがとれる。

あとは次のようにして矛盾が生じる。

- 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、I に含まれるので、有界である。
  よってボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理から収束する
  部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がとれる。

- このとき数列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は、
  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と同じ値に収束する。 ∵①

- ②より、$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$
  がすべての k についてなり立つ。
  そこで $k \to \infty$ とすれば、f の連続性から、

$$0 \geq \varepsilon$$

となる。これは $\varepsilon > 0$ に矛盾する。