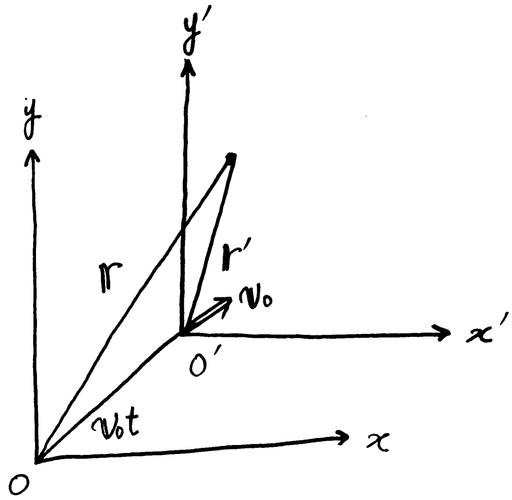
10章　相対運動と慣性力

- 慣性系：慣性の法則が成り立つ系、



相対速度 v_0（一定）で運動する座標系では、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0 t \quad (\text{ガリレイ変換})$$

このとき

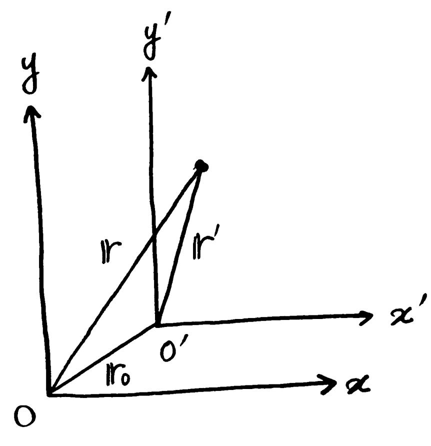
$$\ddot{\boldsymbol{r}} (= \boldsymbol{a}) = \ddot{\boldsymbol{r}}' (= \boldsymbol{a}') \quad \left(\begin{array}{l} v_0 \text{は一定} \\ \text{だから、} \\ \frac{d^2}{dt^2}(v_0 t) = 0 \end{array} \right)$$

$$\downarrow$$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \Rightarrow m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}$$

（ガリレイの相対性原理）

- 並進座標系（等速とは限らない）



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0 \quad \text{微分}$$

$$\therefore \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0 \quad (\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0)$$

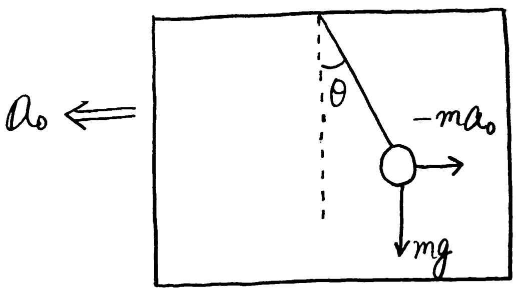
$$\therefore \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 \quad (\boldsymbol{a}_0 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 = \ddot{\boldsymbol{r}}_0)$$

運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

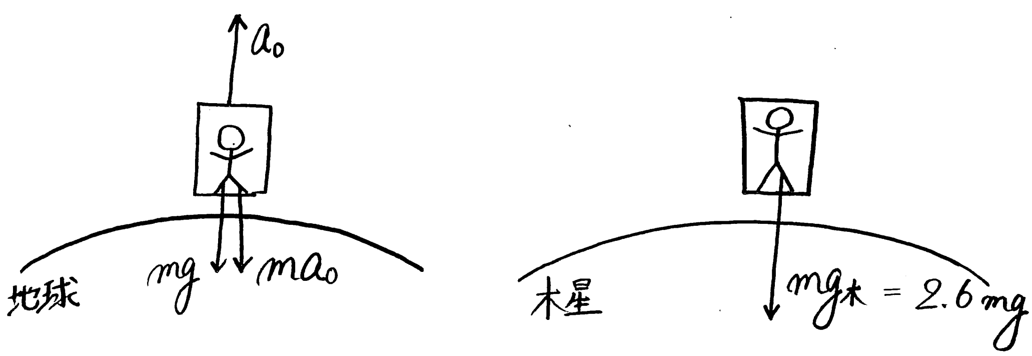
$$\therefore m(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{F}$$

$$\therefore m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} \underbrace{- m\boldsymbol{a}_0}_{\text{慣性力（見かけの力）}}$$



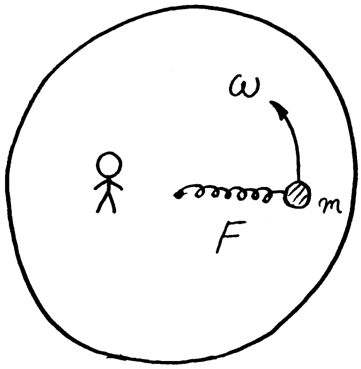
$$\tan\theta = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g}$$

エレベータの中の力



$$F = mg + ma_0$$

回転座標系



回転円盤

外にいる人(慣性系)が見ると、

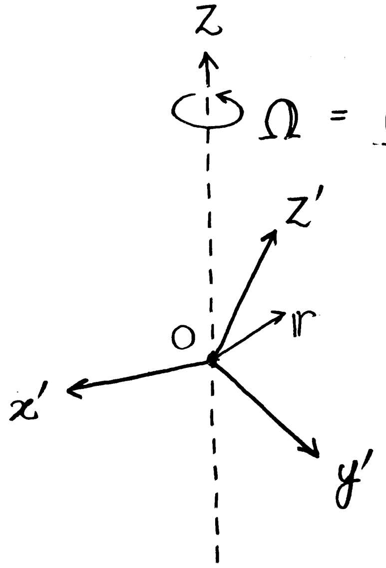
$$ma = F$$

$$\underbrace{mr\omega^2}_{\text{向心加速度}} = F \quad (\text{バネによる力})$$

回転円盤に乗った人が見ると、

$$0 = \underbrace{mr\omega^2}_{\text{遠心力(慣性力)}} - F$$

○ 原点を通る軸回りの座標系の回転

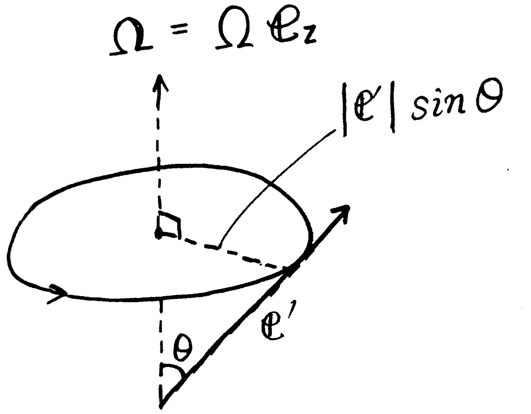


$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

$$\downarrow \quad \text{回転座標系}$$

$$\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{e}_{x'} + y'\boldsymbol{e}_{y'} + z'\boldsymbol{e}_{z'} \quad \text{—— ①}$$



回転の大きさ

$$\underset{\text{速度}}{\dot{e}'} = \underbrace{\cancel{|e'|\sin\theta \cdot |\Omega|}}_{\text{外積の大きさと一致!}} \cdot \frac{\Omega \times e'}{\cancel{|\Omega \times e'|}}$$

の式

$$= \Omega \times e'$$

座標系の回転速度は、

$$\begin{cases} \dot{e}_{x'} = \Omega \times e_{x'} \\ \dot{e}_{y'} = \Omega \times e_{y'} \\ \dot{e}_{z'} = \Omega \times e_{z'} \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

① を時間微分して、

$$\dot{r} = \underbrace{(\dot{x}' e_{x'} + \dot{y}' e_{y'} + \dot{z}' e_{z'})}_{v' \text{ (回転系から見た速度)}} + (x' \dot{e}_{x'} + y' \dot{e}_{y'} + z' \dot{e}_{z'}) \quad \text{--- ③}$$

② より、

$$x'\dot{\mathbf{e}}_{x'} + y'\dot{\mathbf{e}}_{y'} + z'\dot{\mathbf{e}}_{z'}$$

$$= x'\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_{x'} + y'\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_{y'} + z'\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_{z'}$$

$$= \boldsymbol{\Omega}\times\underbrace{\left(x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'} + z'\mathbf{e}_{z'}\right)}_{\mathbf{r}\ (\because ①)}$$

$$= \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$$

なので、③ は、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} \quad \text{——— ④}$$

③ を時間微分して、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \underline{\left(\ddot{x}'\mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}'\mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}'\mathbf{e}_{z'}\right)}_{(1)} + \underline{2\left(\dot{x}'\dot{\mathbf{e}}_{x'} + \dot{y}'\dot{\mathbf{e}}_{y'} + \dot{z}'\dot{\mathbf{e}}_{z'}\right)}_{(2)} + \underline{\left(x'\ddot{\mathbf{e}}_{x'} + y'\ddot{\mathbf{e}}_{y'} + z'\ddot{\mathbf{e}}_{z'}\right)}_{(3)} \quad \text{——— ⑤}$$

(1) は $\mathbf{a}'$。

(2) は、$\dot{x}'\dot{\mathbf{e}}_{x'} \overset{②}{=} \dot{x}'\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_{x'}\right) = \boldsymbol{\Omega}\times\dot{x}'\mathbf{e}_{x'}$

$\dot{y}'\dot{\mathbf{e}}_{y'} = \boldsymbol{\Omega}\times\dot{y}'\mathbf{e}_{y'}$

$\dot{z}'\dot{\mathbf{e}}_{z'} = \boldsymbol{\Omega}\times\dot{z}'\mathbf{e}_{z'}$ を用いて、

$$(2) = 2\boldsymbol{\Omega}\times\left(\dot{x}'\mathbf{e}_{x'} + \dot{y}'\mathbf{e}_{y'} + \dot{z}'\mathbf{e}_{z'}\right)$$

$$= 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}' \quad \text{——— ⑥}$$

(3)は、$x'\ddot{e}_{x'} = x'\dfrac{d}{dt}(\dot{e}_{x'})$

$$= x'\frac{d}{dt}(\Omega \times e_{x'})$$

$$= x'(\dot{\Omega} \times e_{x'} + \Omega \times \dot{e}_{x'})$$

$$= \dot{\Omega} \times (x'e_{x'}) + \Omega \times (\Omega \times x'e_{x'})$$

y, z成分も同様。よって、

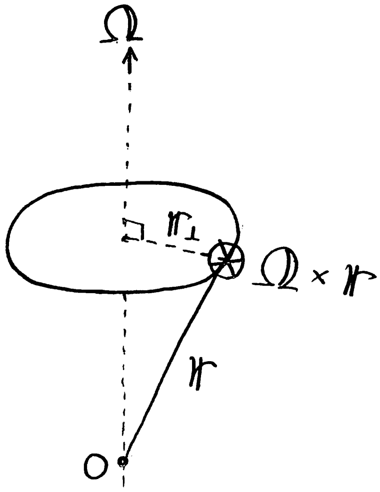
$$(3) = \dot{\Omega} \times (x'e_{x'} + y'e_{y'} + z'e_{z'}) + \Omega \times (\Omega \times (x'e_{x'} + y'e_{y'} + z'e_{z'}))$$

$$= \dot{\Omega} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) \quad \text{—— ⑦}$$

よって⑤は、

$$a = a' + 2\Omega \times v' + \dot{\Omega} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) \quad \text{—— ⑧}$$

$$= a' - 2v' \times \Omega - r \times \dot{\Omega} + \Omega \times (\Omega \times r) \quad \text{—— ⑧}'$$



$$\Omega \times \underbrace{(\Omega \times r)}_{-r_\perp \cdot \Omega \cdot \frac{r_\perp}{r_\perp}} = -r_\perp \Omega^2 \quad \text{—— ⑨}$$

$(r \sin\theta)$

⑧′ と ⑨ より、

$$ma = F$$

$$\Longrightarrow ma' = F + \underbrace{\overbrace{2mv' \times \Omega}^{\text{コリオリ力}} + mr \times \dot{\Omega} + \overbrace{mr_\perp \Omega^2}^{\text{遠心力}}}_{\text{慣性力}} \quad \text{—— ⑩}$$