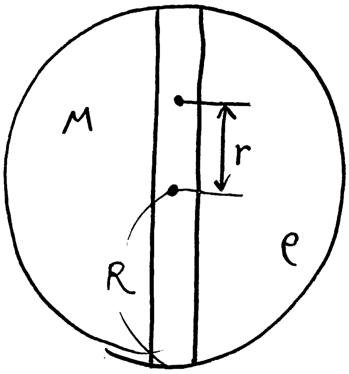
問題 1.23



問1.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{GM(r)\cdot m}{r^2} & \text{(ガウスの定理)} \\ M(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{cases}$$

$$\therefore \cancel{m}\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho r$$

これは単振動の方程式。
解は、

$$r = \left|R\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}\cdot t\right)\right|$$

$$= \left|R\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\cdot t\right)\right|$$

問2.

(1) $m\dfrac{v_0^2}{R} \leq \dfrac{GMm}{R}$ すなわち、$v_0 \leq \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ (第1宇宙速度)

このとき、小球は表面をころがる。

(2) $v_0 \geq \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ のとき、原点に質量Mがあるときの運動と同じ。

(Mは焦点)

$\sqrt{\dfrac{GM}{R}} < v_0 < \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ (第2宇宙速度)

$E<0 \longrightarrow e<1$ 楕円

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta} \qquad \left(\begin{aligned} l &= \frac{h^2}{GM} \\ e &= \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2mM^2}} \\ h &= Rv_0 \\ E &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \end{aligned} \right)$$

$v_0 > \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ のとき

$E>0 \longrightarrow e>1$ 双曲線

有効ポテンシャル

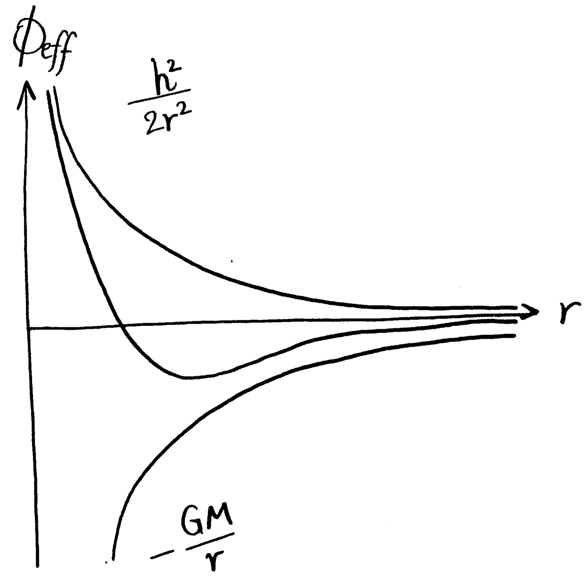
エネルギー保存

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - G\frac{Mm}{r} = E \ (一定)$$

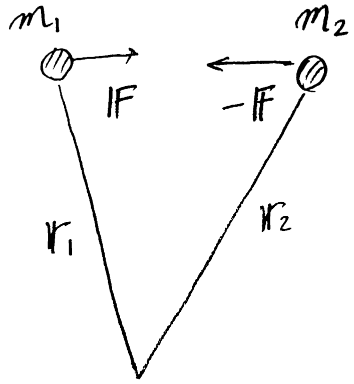
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} - G\frac{Mm}{r}}_{U_{eff}\ (有効位置エネルギー)} = E$$

mでわると、

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{r^2} - \frac{GM}{r}}_{\phi_{eff}\ (有効ポテンシャル)} = \frac{E}{m} \ (一定)$$



2体問題（連星系）



相対座標 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

運動方程式

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \mathbf{F}(\mathbf{r}') \quad \text{——— ①}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_2 m_1}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}') \quad \text{——— ②}$$

① + ② より、

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$$

$$\therefore \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

重心 $\mathbf{r}_C \equiv \dfrac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$

①−② より、

? ?

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbb{F}(\mathbf{r}')$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{換算質量})$$

$$\therefore \ \mu \ddot{\mathbf{r}}' = -G\frac{(m_1+m_2)\mu}{r'^2}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \quad ③$$

$$\left(cf. \ m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

よって、$\mathbf{r}'$は、質量(m_1+m_2)の質点のまわりの質量μの質点の1体問題に帰着する。

2体の運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}\mu v'^2 \quad ④$$

重力エネルギー

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}'|} \quad ⑤$$

全エネルギー

$$E = T + U \quad ⑥$$

重心系で見ると（$\dot{\mathbf{r}}_c = v_c = 0$）、

$$E = \frac{1}{2}\mu v'^2 - \frac{Gm_1m_2}{r'} = 一定 \quad ⑦$$

$|\mathbf{r}'|$?

角運動量

$$\mathbb{L} = \mathbb{r}_1 \times m_1 \mathbb{v}_1 + \mathbb{r}_2 \times m_2 \mathbb{v}_2$$

$$= \underbrace{\mathbb{r}_C \times (m_1 + m_2)\mathbb{v}_C}_{\text{重心の角運動量}} + (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_C) \times m_1(\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_C) + (\mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_C) \times m_2(\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_C) \quad \text{⑧}$$

重心系で見ると、

$$\mathbb{L}_C = \mathbb{r}_{1C} \times m_1 \mathbb{v}_{1C} + \mathbb{r}_{2C} \times m_2 \mathbb{v}_{2C} \quad \text{⑨}$$

$$\mathbb{r}_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbb{r}'$$

$$\mathbb{r}_{2C} = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbb{r}'$$

$$\therefore \mathbb{L}_C = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbb{r}' \times \mathbb{v}_{1C} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbb{r}' \times \mathbb{v}_{2C}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbb{r}' \times (\mathbb{v}_{1C} - \mathbb{v}_{2C})$$

$$= \mu \mathbb{r}' \times \mathbb{v}'$$

角運動量保存

$$\frac{d\mathbb{L}_c}{dt} = 0$$

?

$$\mathbb{r}' \times \mu \frac{d\mathbb{v}'}{dt} = \mu(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2) \times \left(\frac{d\mathbb{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbb{v}_2}{dt}\right)$$

$$= \mu \mathbb{F}' \times \left[\frac{\mathbb{F}(\mathbb{r}')}{m} + \frac{\mathbb{F}(\mathbb{r}')}{m_2}\right] = 0$$

$$\longrightarrow \mathbb{L}_c = 一定 \quad \text{——— ⑩}$$

?

③, ⑦, ⑩ より、1体問題の解として $\mathbb{r}'$ が求まる。

$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 = \mathbb{r}_c + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbb{r}' \\ \mathbb{r}_2 = \mathbb{r}_c - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbb{r}' \end{cases}$$