§.4 微積分の基礎づけ

0 実数の定義

記号 $\mathbb{N}$： 自然数全体のなす集合

$\mathbb{Z}$： 整数 〃

$\mathbb{Q}$： 有理数 〃

$\mathbb{R}$： 実数 〃

$\mathbb{N}$

$\cap$ ： 0と負の数を加える

$\mathbb{Z}$

$\cap$ ： 整数の比 $\left(\frac{n}{m},\ m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right)$ を加える。

$\mathbb{Q}$

$\cap$ ： ここは何をすればよいか？

$\mathbb{R}$ （解決したのは19世紀末）

$\mathbb{R}$を"つくる"には、大きくわけて2つの方法がある。

① デデキントの方法 （有理数の切断）

② カントールの方法 （有理数の完備化）

結果としては同じものができる。

ここでは、②の方法を述べる。

（アイデアのみ）

例として「2乗すると2になる正の数」α を考えよう。

まず、$1^2 < 2 < 2^2$ だから、

$\underbrace{1 < \alpha < 2}_{\text{差は}1}$ であろう。

次に、$(1.4)^2 = 1.96$

$(1.5)^2 = 2.25$ だから、

$\underbrace{\frac{14}{10} < \alpha < \frac{15}{10}}_{\text{差は}\frac{1}{10}}$ であろう。

同様に、$(1.41)^2 = 1.9881$

$(1.42)^2 = 2.0164$ だから、

$\underbrace{\frac{141}{100} < \alpha < \frac{142}{100}}_{\text{差は}\frac{1}{100}}$ であろう。

さらに続けて、

$\underbrace{\frac{1414}{1000} < \alpha < \frac{1415}{1000}}_{\text{差は}\frac{1}{1000}}$ であるはず。

この作業を続けることで、α を有理数でいくらでも良く近似できる。

$\downarrow$

カントールの実数の定義のアイデア

このように、有理数でいくらでも良く近似できるような数をすべて集めた集合を $\mathbb{R}$ とする。

○ 実数の性質

実数の定義から、次のことを証明できる。

(1) 有理数の稠密性

a を実数とするとき

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q} : |r-a| < \varepsilon$$

補足 (1) は、

「a のどんな近くにも有理数がある」ということ。

⟶「ε がどんな正の数であっても、
$a-\varepsilon$ から $a+\varepsilon$ の間に有理数がある。」

⟶「ε がどんな正の数であっても、
有理数 r であって、
$a-\varepsilon < r < a+\varepsilon$ を満たすものが存在する。」

⟶「任意の正の数 ε に対し、
ある有理数 r が存在して、
$|r-a| < \varepsilon$ が成り立つ。」

⟶「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q} : |r-a| < \varepsilon$」

(2) 上限・下限の存在

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする。

A の上界が存在するならば、
A の上界全体のなす集合は最小値をもつ(これを A の上限という)。

A の下界が存在するならば、
A の下界全体のなす集合は最大値をもつ(これを A の下限という)。

☆ 上限・下限の存在から、次のことが順に証明される。

定理1.5 (W)→(M) (p.13)

上に有界な広義単調増加する数列は収束する。

定理7.9 (ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理) p.270

有界な数列は収束する部分列をもつ。

定理7.10 (実数の完備性, p.271)

実数列がコーシー列ならば収束する。

・ e の存在

定理 1.3 (p.9)

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

(証明)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、上に有界かつ単調増加であることを示せばよい(定理 1.5)。

これを示す準備として、次のことに注意する。

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \qquad \left(\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(k-1)}{n}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$ と書ける。

① $\{a_n\}$ が単調増加であること。

$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > a_1$ である。

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$= a_{n+1}$$

より、$a_n < a_{n+1}$ である。

よって $\{a_n\}$ は単調増加。

② $\{a_n\}$ が上に有界であること。

$n \geqq 2$ のとき、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1}$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\cdot 1 \cdots 1$$

$$\left(k! \begin{array}{l} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(k-1)\cdot k \\ > 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot\ 2 = 2^{k-1} \end{array} \right)$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\cdot 1$$

$$= 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1+2 = 3$$

よって、$n \geqq 2$ のとき、$a_n < 3$。

$a_1 = 2$ より、すべての n について、$a_n < 3$ が成り立つ。

したがって、$\{a_n\}$ は上に有界である。