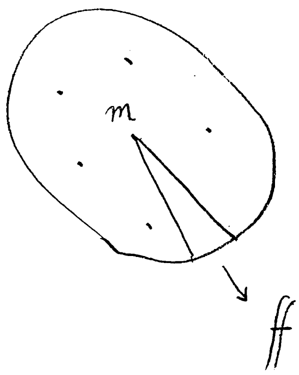
$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -4\pi G m \quad (mが内部)$$

$$= 0 \quad (mが外部)$$



$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -4\pi G \sum_{i(内部)} m_i$$

$$\sum_{i(内部)} m_i = \int \rho\, dV$$

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -4\pi G \int \rho\, dV$$

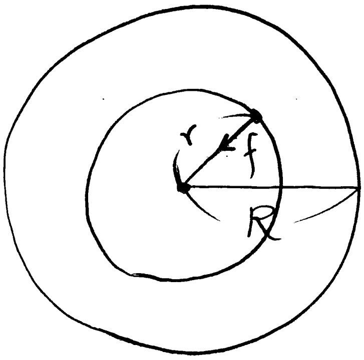
Gaussの定理(積分定理)

クーロン力

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\longrightarrow \oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho_0\, dV$$

○ 一様球の重力



Gaussの積分定理より、

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = f\cdot 4\pi r^2 \ (\text{左辺})$$

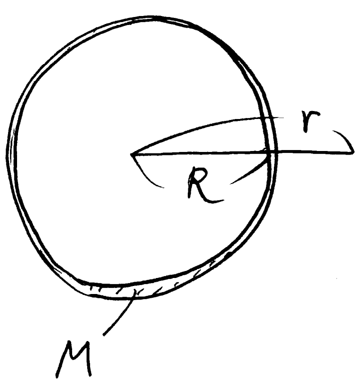
$$= -4\pi G\int \rho\, dV$$

$$= -4\pi G\cdot\underbrace{\frac{4\pi}{3}\rho r^3}_{M(r)}$$

$$\therefore f = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

これは $M(r)$ が中心に集まったときと同じ

○ 球殻の重力



$r > R$ のとき、

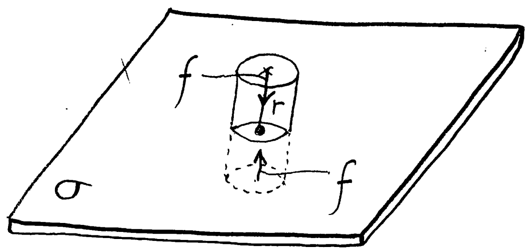
$$f = -\frac{GM}{r^2}$$

$r < R$ のとき、

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0$$

$$\therefore f = 0$$

○ 無限に広いシート



S = 1 の 円筒

$$\oint f\cdot n\,dS = f \times \overset{2S}{2} \quad (左辺)$$

$$= -4\pi G \int \rho\, dV$$

$$= -4\pi G \cdot \sigma \times \overset{S}{1}$$

$$\therefore f = -2\pi G \sigma$$

○ Gaussの発散定理

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int \mathrm{div}\boldsymbol{A}\, dV$$

これとGaussの積分定理より、

$$\int \mathrm{div}\boldsymbol{f}\, dV = -4\pi G \int \rho\, dV$$

$$\boldsymbol{f} = -\nabla\phi = \mathrm{grad}\,\phi$$

$$\therefore -\int \underbrace{\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\phi\right)}_{\Delta\phi} dV = -4\pi G \int \rho\, dV$$

$$\therefore -\int \Delta\phi\, dV = -4\pi G \int \rho\, dV$$

$\therefore \Delta\phi = 4\pi G\rho$ ポアソン方程式

$\rho = 0$ では、

$\Delta\phi = 0$ ラプラス方程式

クーロン力では、

$\Delta\phi_Q = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0$ ポアソン

$\Delta\phi_Q = 0$ ラプラス

○ 万有引力による重力

2次元極座標による。

運動方程式

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\dfrac{Mm}{r^2} & \text{——— ①} \\ m \cdot \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r\dot{\theta}^2) = 0 & \text{角運動量保存 ②} \end{cases}$$

②より、

$$r^2\dot{\theta} = r v_\theta = h \text{(一定)} \quad \text{——— ③}$$

①×$\dot{r}$より、

$$m(\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2}\dot{r}$$

③より、

$$m\left(\dot{r}\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{r^3}h^2\right) = -G\frac{Mm}{r^2}\dot{r}$$

時間tで積分して、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{h^2}{r^2} = G\frac{Mm}{r} + E \quad \text{——— ④}$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - G\frac{Mm}{r} = E \quad \text{(全エネルギーの保存) ⑤}$$

ここで $r \equiv \dfrac{1}{u}$ $\left(u \equiv \dfrac{1}{r}\right)$ と変数変換

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\overset{r^2}{\frac{1}{u^2}}\frac{du}{d\theta}\frac{h}{r^2}$$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

⑤に代入

$$\frac{1}{2}m\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{2}mh^2u^2-GMmu=E$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{mh^2}-u^2+\frac{2GMu}{h^2}$$

$$=\left(\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2h^2}{h^4}\right)-\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)^2$$

$$\therefore d\theta=\pm\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2M^2}{h^4}\right)-\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)^2}} \quad \text{―― ⑥}$$

$$\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} \qquad x=\sqrt{a}\cos t \\[2ex] \displaystyle\int\frac{-\sqrt{a}\sin t}{\sqrt{a-a\cos t}}dt = \pm\int dt = \pm t \\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad = \pm\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}}\end{array}\right)$$

⑥を積分すると、

$$\theta-\theta_0=\pm\cos^{-1}\frac{u-\frac{GM}{h^2}}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2M^2}{h^4}}}$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + \sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2M^2}{h^4}}\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{h^2}{GM} \equiv l \ , \quad \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2mM^2}} \equiv e$$

とおくと、$\theta_0 = 0$ として、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \qquad ⑦$$

$e \lesseqqgtr 1$ に応じて、楕円, 放物線, 双曲線を表す。

$e \lesseqqgtr 1 \iff E \lesseqqgtr 0$ に対応

軌道は、
$$\begin{cases} 楕円 : & E < 0 \\ 放物線 : & E = 0 \\ 双曲線 : & E > 0 \end{cases}$$