問題 1.20

問1. Aのr方向 $m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = -T$ ——— ①

Aのθ方向 $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ (角運動量保存) — ②

Bについて $m\ddot{r} = T - mg$ ——— ③

問2. ①, ③より、

$$2m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -mg \quad (2\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = -g) \text{ — ④}$$

② を積分して

$$r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \sin\varphi$$

④ を使って、

$$\ddot{r} = \frac{(r_0 v_0 \sin\varphi)^2}{2r^3} - \frac{g}{2} \text{ ——— ⑤}$$

問3. ⑤ に $\dot{r}$ をかけて積分

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}(v_0\sin\varphi)^2 = \frac{1}{4}v_0^2\sin^2\varphi - \frac{r_0^2}{4r^2}v_0^2\sin^2\varphi - \frac{g}{2}(r-r_0)$$

よって動径方向の運動エネルギーは、

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = \frac{m}{2}\left[v_0^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}v_0^2\sin^2\varphi - \frac{r_0^2}{2r^2}v_0^2\sin^2\varphi - g(r-r_0)\right] \text{ — ⑥}$$

問4. $\varphi = 0$ のとき ⑥

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = \frac{m}{2}\left[v_0^2 - g(r-r_0)\right]$$

$\dot{r} \geq 0$ となるはんいを求める.

$$r_{max} = \frac{v_0^2 + g r_0}{g}$$

$$r_{min} = 0$$

問5. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のとき ⑥は、

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = \frac{m}{2}\left[\frac{v_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2r^2}v_0^2 - g(r-r_0)\right]$$

$$= \frac{m}{2r^2}(r-r_0)\left[\frac{v_0^2}{2}(r+r_0) - g r^2\right]$$

$\dot{r} = 0$ となる r は、

$$r = 0$$

$$r = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 g r_0}{v_0^2}}\right) = a$$

$v_0^2 > g r_0$ なら、 $a > r_0$ よって 最大値 a

最小値 r_0

〃 $<$ 〃 $<$ 〃 〃 r_0

〃 a

◦ 万有引力

- ケプラーの3法則

  ① 太陽を焦点とする楕円

  ② 面積速度一定

  ③ 公転周期Tと軌道長半径aは、$T^2 = ka^3$

◦ かんたんのために等速円運動を考える

$$mr\omega^2 = F$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ケプラーの第3法則より、$T^2 = kr^3$

$$\therefore F = mr\omega^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2}$$

作用・反作用より、

$$F \propto \frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{k} \equiv GM$$ とおくと、

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

○ 万有引力による位置エネルギー

仕事

$$W = \int_{\infty}^{r} F\,dr$$

$$= \int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$= G\frac{Mm}{r}$$

位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー） U

$$U_\infty - U_r = W$$

$$U_\infty = 0 \quad (\text{基準点 } r = \infty)$$

$$U = -W = -G\frac{Mm}{r}$$

全力学的エネルギー

$$E = T + U$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \quad = \text{一定}$$

・第一宇宙速度

地球の重力

$$mg = G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}$$

$R_\oplus = 6.4$

$R_\oplus = 6.4\times10^6\,m$

$M_\oplus = 5.97\times10^{24}\,kg$

遠心力 = 重力

$$m\frac{v^2}{R_\oplus} = G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} = 7.9\times10^3\,m/s = 2.8\times10^4\,km/h$$

・静止衛星

$$mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\therefore r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$T = 24^h\times60^m\times60^s$

$G = 6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg$

$\longrightarrow r = 4.2\times10^7\,m$

$(r = 6.6R)$

○ 第2宇宙速度（脱出速度）

$$r \to \infty, \quad v \geq 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0$$

$$\therefore \ v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 1.1 \times 10^4 \ m/s$$

$$= 4 \times 10^4 \ km/h$$

$r = \infty$ から落下.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 \simeq 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

。中心力ポテンシャル

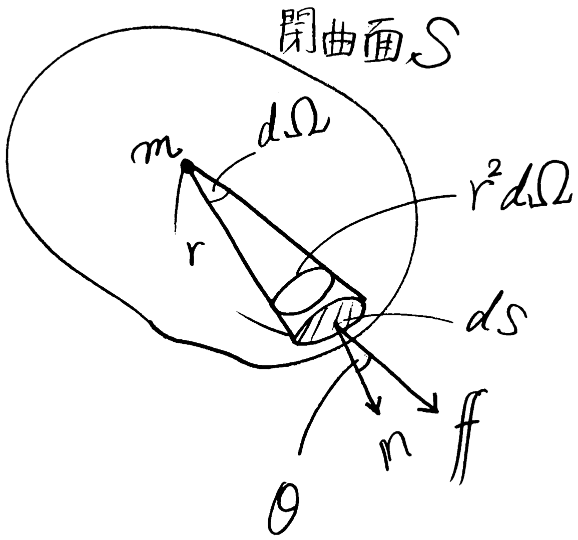
$$\boldsymbol{f} = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad (\text{単位質量})$$

ポテンシャル

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} f\,dr = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GM}{r^2}\,dr = -\frac{GM}{r}$$

$$\boldsymbol{f} = -\nabla\phi$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$



$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = f\cos\theta\,dS$$

また

$$\cos\theta\,dS = r^2 d\Omega$$

mが閉曲面Sの中にあるとき

$$\oint \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint f r^2 d\Omega = \oint -\frac{Gm}{r^2} r^2 d\Omega$$

$$= -Gm\oint d\Omega = -Gm\cdot 4\pi$$

m が S の外にあるとき:

$$\oint f \cdot m \, dS = 0.$$