◎ 広義積分の収束判定（続き）

定義 (p.114)　有限または無限区間 I 上の広義積分 $\int_I f(x)\,dx$ が絶対収束するとは、

$$\int_I |f(x)|\,dx < \infty$$

であるときにいう。

定理 3.16 (p.114)

絶対収束する広義積分は収束する。

（証明）　ここでは積分区間が $[a, \infty)$ のときに示す。

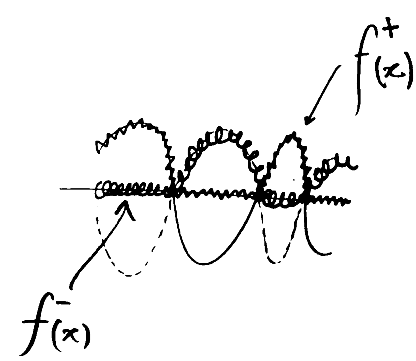
$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = M$$

とおく。（M は定数）

関数 f^+, f^- を次で定める。

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$



このとき次のことが成り立つ。

① $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

② $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

③ $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$

②, ③ より、

$$0 \leq f^{+}(x) \leq |f(x)|$$

したがって $A > a$ のとき、

$$\int_a^A f^{+}(x)dx \leq \int_a^A |f(x)|dx$$

この右辺は、A について広義単調増加で、

$A \to \infty$ のとき、M に収束する。　よって、

$A > a$ のとき 右辺は M 以下なので、

$$\int_a^A f^{+}(x)dx \leq M$$ がなりたつ。

この左辺は ③ より、A について 広義単調増加である。

よって、

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A f^{+}(x)dx$$ は収束する。

同様にして

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A f^{-}(x)dx$$ も収束する。

したがって ① より、

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^A f^{+}(x)dx - \int_a^A f^{-}(x)dx$$

の右辺は $A \to \infty$ のとき収束する。よって 広義積分

$$\int_a^\infty f(x)dx$$ は収束する。

注意　定理3.16の逆は正しくない。

（反例．$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束するが、絶対収束しない．）

系　有限または無限区間 I 上の広義積分 $\displaystyle\int_I f(x)dx$ について、次の2つの条件をみたす関数 g が存在すれば、この広義積分は収束する。

（ア）I の端点以外において $|f(x)| \leq g(x)$ がなりたつ。

（イ）$\displaystyle\int_I g(x)dx < \infty$

証明　$I = [a, \infty)$ の形の場合に示す。

$A > a$ のとき、（ア）より、

$$\int_a^A |f(x)|dx \leq \int_a^A g(x)dx$$

が成り立つ。

右辺は A について広義単調増加で、（イ）より、$A \to \infty$ のとき収束する。

よって定理3.16の証明と同様にして、

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A |f(x)|dx$$

も収束する。よって、

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は絶対収束する。

定理3.16より、$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する。

例 (1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ は収束する。

$x \geq 1$ のとき、

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$ が成り立ち、

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1 < \infty$$ であるから、

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ は収束する。

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する.

$A > 1$ のとき、

$$\int_1^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_1^{A} \frac{(-\cos x)'}{x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^{A} - \int_1^{A} (-\cos x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^{A} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

(1)で証明済

ここで、

$$0 \leq \left|\frac{\cos A}{A}\right| \leq \frac{1}{A} \to 0 \quad (A \to \infty)$$ より、

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$$

(1)より、$\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\cos x}{x^2}dx$ は収束するので、

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する。

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ は収束する。

$0 < x \leq 1$ のとき、

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$ が成り立ち、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2 < \infty$$ であるから、

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ は収束する。

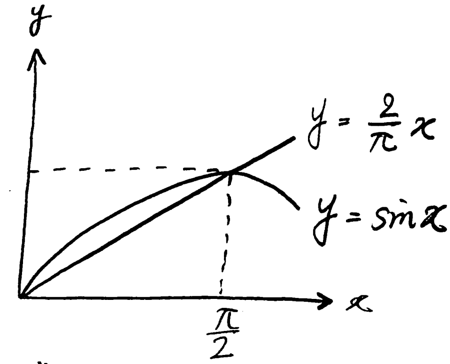
補足 (1), (3) のように、被積分関数の絶対値を上から評価する関数として、

$$\frac{C}{x^\alpha}, \quad \frac{C'}{|x-\alpha|^\beta}$$

の形のものをとることが多い。

(定理 3.17, 3.18 (p.115))

例 (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する。



$0 < x \leq 1$ のとき

$0 < \frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つので、

$0 < x \leq 1$ のとき、

$$0 < \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$ であり、

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$$ なので、

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する。