問題 1.19

問1. $\frac{1}{2}mv^2 = mgl \quad \therefore v = \sqrt{2gl}$

問2. $M\sqrt{2gl} - m\sqrt{2gl} = Mv_A + mv_B$

問3.

$$2\sqrt{gl} = -(v_A - v_B)$$

これと問2の結果から、

$$v_B = \frac{3M - m}{M + m}\sqrt{2gl}$$

問4.

$$m\frac{v^2}{l} = mg\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 + \sin\theta)$$

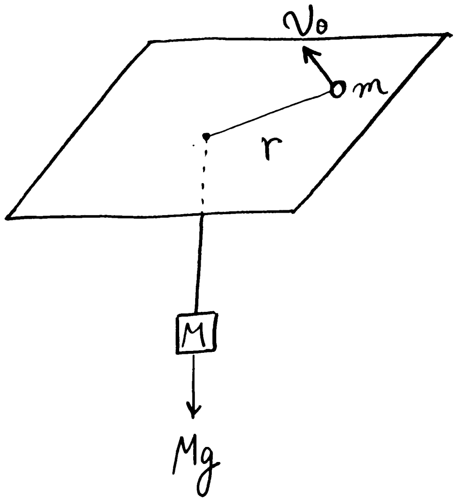
これらより、

$$\sin\theta = \frac{v_B^2 - 2gl}{3gl} = \frac{16}{3}\cdot\frac{M(M-m)}{(M+m)^2}$$

問5. $\sin\theta < 1$

$$m > \frac{-11 + 4\sqrt{10}}{3}M \quad , \quad (m < M)$$

○ 角運動量に関する例題



(1) 遠心力

$$m\frac{v_\theta^2}{r}$$

$v = v_\theta$ のとき

$$m\frac{v^2}{r}$$

角運動量保存

$$l = mr^2\omega = 一定$$

遠心力

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{l^2}{mr^3} \propto \frac{1}{r^3}$$

(2) 初期に r_0 で、θ 方向に v_0 の速度を与えたとき、どこまでちぢむか

$$\left(m\frac{v_0^2}{r} < Mg \right)$$

角運動量保存

$$l = mr_0v_0 = mr_0v_0 = mrv \ (一定)$$

エネルギー保存

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mgr_0$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + Mgr$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_0^2 + Mgr_0 = \frac{1}{2}m\left(\overbrace{\frac{r_0}{r}v_0}^{v}\right)^2 + Mgr$$

$(l = 一定より)$

$$\therefore (r - r_0)\left[2Mgr^2 - mv_0^2 r - mv_0^2 r_0\right] = 0$$

$$r = r_0$$

$$r = \frac{mv_0^2}{4Mg}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8Mgr_0}{mv_0^2}}\right) \equiv r_\pm$$

$r > 0$ なので、 $r = r_+$

この問題を一般的に扱おうとすると、

(3) 2次元の極座標の運動方程式

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

$$F_r = -T, \quad F_\theta = 0$$

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = -T \quad \text{―― ①} \\ m\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow r^2\dot{\theta} = r^2\omega = \text{一定} \equiv h \quad \text{―― ②} \end{cases}$$

角運動量保存

重りMについては、

$$M\ddot{r} = T - Mg \quad \text{―― ③}$$

①, ②, ③ より、

$$m\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right) + M\ddot{r} + Mg = 0 \quad \text{―― ④}$$

$\dot{r}$ をかけて積分

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + Mgr = C$$

$$\therefore \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\underbrace{r\omega}_{v_\theta})^2 + Mgr = C \quad \text{―― ⑤}$$

エネルギー保存

$r = r_0$ で $\dot{r} = 0$, $v_\theta = v_0$ なので、

$$C = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mgr_0 \quad , \quad h = r_0 v_0$$

よって⑤は、

$$\dot{r}^2 = \frac{r_0 - r}{(m+M)r^2}\left\{2Mgr^2 - mv_0^2(r + r_0)\right\} \text{ ―― ⑥}$$

$\dot{r} = 0$ のとき、

$$2Mgr^2 - mv_0^2 r - mv_0^2 r_0 = 0$$

前問の $r = r_\pm$

④は、

$$(m+M)\ddot{r} = m\frac{h^2}{r^3} - Mg$$

初期に、

$$m\frac{h^2}{r^3} < Mg \quad なら、\ddot{r} < 0$$

よって、rは減少

h = 一定なので、rの減少に従って、$r = r_1$ で、

$$m\frac{h^2}{r_1^3} = Mg \quad (\ddot{r} = 0)$$

このとき、$\dot{r} < 0$ なので、rはさらに減少

$$r < r_1 \text{ で } m\frac{h^2}{r^3} > Mg$$

$\dot{r}$ は減少して、
最小半径 r_{min} に達する

$$m\frac{h^2}{r_{min}^{\ 3}} > Mg$$

なので、r は増加を始める。

$r = r_1$ まで戻ったとき

$$m\frac{h^2}{r_1^{\ 3}} = Mg \quad , \quad \dot{r} > 0$$

なので、$r > r_1$ に増大する。

⑥は、

$$\dot{r}^2 = \frac{2Mg}{(m+M)\,r^2}(r_0 - r)(r - r_+)(r - r_-)$$

$r_- < 0$ なので $r - r_- > 0$

$\dot{r} = 0$ になる所は、$r = r_0$, $r = r_+ = r_{min}$