2章 章末 問題5 (p.56)

A, B を n 次正方行列とするとき、
$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n \leq \mathrm{rank}AB$ を示せ.

rankは難しい概念。七変化

- まず rankの定義を
  たくさん定義があるけど、
  行基本変形をして簡約階段行列にして、
  生き残った列の数 ← これが一意になる証明したなあ.
  (↑定義はこれ)

- $\mathrm{rank}AB \leq \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}$

示すものは
$$\mathrm{rank}A - n + \mathrm{rank}B - n \leq \mathrm{rank}AB - n$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{n - \mathrm{rank}A}_{\text{nullAに相当するもの}} + n - \mathrm{rank}B \geq n - \mathrm{rank}AB$$

- Aにかける基本行列は可逆行列

Aのかわりに	PAQ	P, Q 可逆
B 〃	$Q^{-1}BR$	Q, R 可逆
↓		
AB 〃	$PABR$	

なんかよくわからん
線形写像を導入すると、こういうのがあっさり

- Qは決まっちゃうから P, Q は fix ?

(p.56) 問3からわからない. → 小行列の話?

問3 (1) rank $A \le 1$

$$\begin{pmatrix} \overset{0}{\underset{\#}{}} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$d - b \cdot \frac{c}{a} = 0$$

$$ad - bc = 0$$

$$\downarrow$$

$$\text{rank}1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$$

3次以上は?

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & \cdots \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d & \\ \mu a & \mu b & \mu c & \mu d & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ = & \lambda a & \lambda b & \lambda c & \\ & \mu a & \mu b & \mu c & \cdots \\ & \vdots & & & \end{matrix}$$

i ?

$\sum \varepsilon(\sigma) e_{i\sigma(s)}$

$E_{ij}(c) = (e_{st})$

行列式の定義に従って計算すると、0でない項は

$s(\neq i)$ 行からは

対角成分の $e_{ss}=1$ 以外はすべて0。

ゆえに、$j \neq i$ なので、j 列からもすでに $e_{jj}=1$ をとってきているので、

i 行も 対角成分 $e_{ii}=1$ のみ。

四則演算や、行が同じということしか使ってない。

- ケーリー・ハミルトンが3次, 4次, … で成り立つことを示す。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$$

- 線形写像
  変換

$v \to f(v) = {}^{\exists}\lambda v$ に偶然なったら

$f : V \to V$（$v \in V$, $f(v) \in V$）

λ：スカラー　数値 ← 実験による値

実験は数値で返ってくる

数値をとらえる方法？ → 固有値－固有ベクトル