・p.79　定理3.10

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{v^1} & \cdots & \boxed{v^i} & \cdots \end{pmatrix} \quad n次行列$$

行列式は（ベクトルによる）かけ算だと思ってください。今は深く考えないで。

$$|A| = v^1 * v^2 * \cdots * v^n$$

でもどこか2つひっくり返すと −1倍になるというかけ算。

（※ 2つかけると考えると、外積になる）

（何次元でも1次元に落ちてくれるのが、
行列式の拡張された形？）

（2つのベクトルが同じだったら、
交換したら行列式は −1 にならなくちゃいけない
ということは、0.）

$$v^1 * \cdots * v^{i-1} * (\lambda u + w) * v^{i+1} * \cdots * v^n$$

$$= \bigcirc * (\lambda u) * \bigcirc + \bigcirc * (w) * \bigcirc$$

○ p.91　定理3.21　ファンデルモンドの行列式

（成分に多項式が入ろうが、行列が入ろうが構わない。
今までは数字しか入れてこなかったけど。
~~新~~出発点は関数を入れていたのね。）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = 1\cdot x_2\cdot x_3^2 - 1\cdot x_1\cdot x_3^2 + \cdots$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(n)}$$

- 総次数は n 次行列で $(n-1)!$ 次だな。
- この多項式は $x_1 = x_2$ だったら、$x_2 = x_3$ だったら、$x_3 = x_1$ だったら 0になる多項式。
- $\underbrace{(x_1 \boxed{-x_2})(x_2 \boxed{-x_3})(x_1 \boxed{-x_3})}$ の倍式になっている。何倍？

ここが総次数3なので、定数倍である。

ただのこれの−1倍？

展開すると $x_1^2 x_2$

展開すると、$-x_2 x_3^2$

o 2項係数 $_nC_m$　　　　2項~~定理~~ → 定義

$$\| $$

$$\binom{n}{m} = \frac{n \times \cdots \times (n-m+1)}{m!}$$

$$\binom{i}{2} = \frac{i(i-1)}{2!}$$

$$\binom{-1}{m} = \frac{-1 \times (-2) \times \cdots \times (-m)}{m!} = (-1)^m$$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - \cdots$$

$$\|$$

$$(1+X)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1}{m} X^m$$

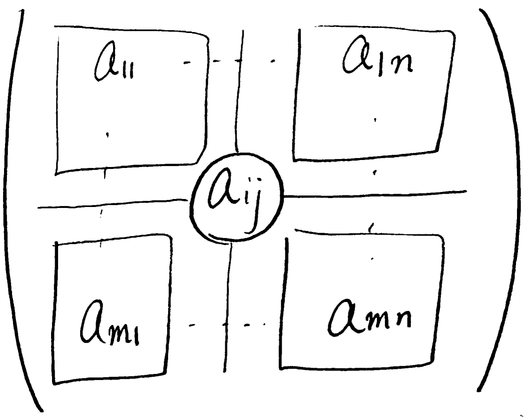
題 x fix

$$a_{ij} = \binom{x+i-1}{j-1}$$

$$\left|(a_{ij})\right| = ?$$

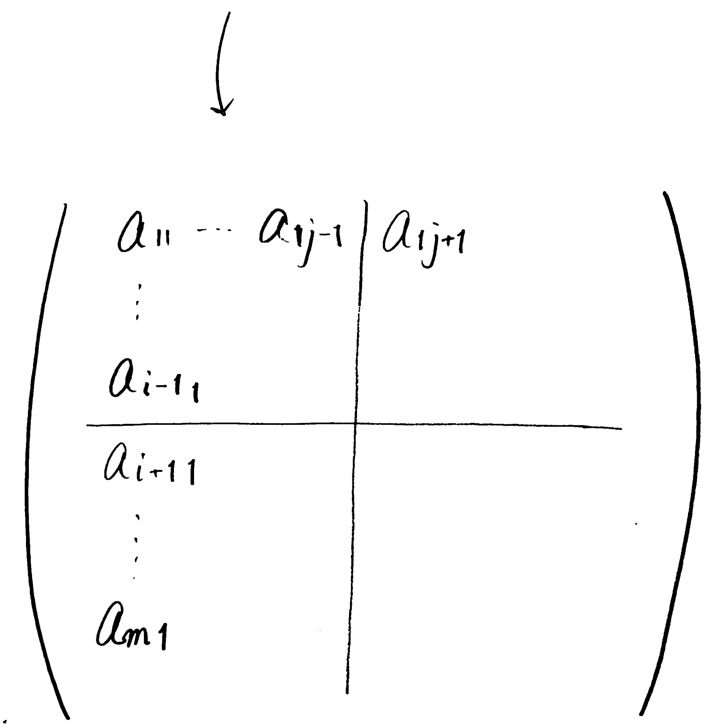
これを本気にやるのは
数学だけだと思って。

p.87 余因子展開



i, j fix

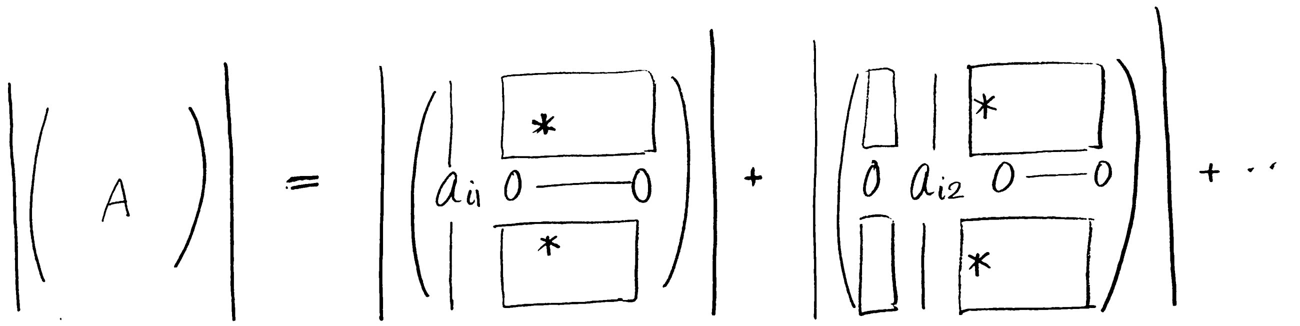
a_{ij}を取る。
同じ列(行)は取れないので無視。



$n-1$ 次行列
A_{ij} で表す：Aからi行j列を取り除いたもの。

$$
\begin{aligned}
|A| = \; & a_{i1}|A_{i1}|(-1)^{i+1} \\
& + a_{i2}|A_{i2}|(-1)^{i+2} \\
& + \cdots \\
& + a_{in}|A_{in}|(-1)^{i+n}
\end{aligned}
$$

(前回1行目でやったのと本質的に同じ)



余因子展開の応用の1つ

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \boxed{d} \end{pmatrix}$ のとき $(\Delta = ad - bc \neq 0)$ 逆行列

aの余因子

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$
$$= -a_{21}|A_{21}| + a_{22}|A_{22}| - a_{23}|A_{23}|$$
$$= a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

2つの行が同じ行列の行列式

質問

$$-a_{11}|A_{21}| + a_{12}|A_{22}| - a_{13}|A_{23}| = 0\ ?$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
の2行目に関する余因子展開

$$|A| \neq 0 \implies \frac{1}{|A|}\left(\quad (-1)^{i+j}|A_{ij}| \quad \right)$$ が A の逆行列。

来週の水曜日に質問時間.
数学の場合、止めて訊く。