

解析 II 期末試験問題 (13/06/28)

● 注意

- 時間は試験開始時から 11:25 まで（授業時間：途中休憩なし）
- 早く終わった場合には提出の上、途中退室してよい。一旦退室した後は再入室はできない。
ただし終了 10 分前以降は終了時まで退室できない。
- トイレなどで中座する場合には許可を得てから退室すること。
- 各解答用紙には必ず授業名・学籍番号・氏名を記入すること。
- 原則として 1 つの大問は 1 枚の用紙にまとめ、問題番号を明記すること。つまり 1 つの大問が何枚もの用紙に分散したりしてはいけない（1 枚に収まりきらない場合にはその限りではない）。必要なら裏面を用いてもかまわないが、できるだけ避けること。
また 1 枚の用紙に複数の大問への解答を記してもよい。
- 教科書、参考書、ノート等は参照不可。公式などについては必要に応じて示す。

● 問題

1. 以下の $f(x, y)$ について、2 階までの偏導関数 ($f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}(=f_{yx})$) を求めよ。

(a) $f(x, y) = x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 - 4y$

(b) $f(x, y) = x(x - y)^2$

(c) $f(x, y) = \frac{\sin y}{\cos x}$

(d) $f(x, y) = y \log(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \neq 0)$

本問については極座標での偏導関数 $f_r, f_\theta, f_{rr}, f_{r\theta}, f_{\theta\theta}$ も求めよ。

2. 以下の累次積分を計算せよ。

(a) $\int_0^1 \left\{ \int_0^1 x^2y^3 dy \right\} dx$

(b) $\int_1^2 \left\{ \int_0^x (x^2y^2 - 4xy^2 + 3x^2) dy \right\} dx$

(c) $\int_0^1 \left\{ \int_0^1 e^{x+2y} dy \right\} dx$

3. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$ を求めよ。

(b) $f(x) = \sin^2 x$ のテイラー展開の (ゼロでない) 4 項目までを求めよ。
できれば一般項を求めよ。

(c) 前問と同様に $f(x) = e^x \sin x$ のテイラー展開を求めよ。

4. $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + y^3 + 6y$ について、以下の問いに答えよ。

(a) 偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ を求めよ。

(b) 点 $(x, y) = (1, 1)$ での接平面の方程式を求めよ。

(c) 停留点の座標、つまり $f_x = f_y = 0$ となる点の (3次元) 座標 $(x, y, f(x, y))$ を求め、(極大点、極小点、鞍点等に) 分類せよ。

(d) $\int_0^1 \left\{ \int_0^x f(x, y) dy \right\} dx$ を求めよ。

5. $z = f(x, y) = (x^2 + y - 1)(x^2 - y - 1)$ とする。

(a) $z = 0$ の等高線の概形を図示し、 $z \geq 0$ となる領域、 $z < 0$ となる領域を図中に示せ。

(b) 偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ を求めよ。

(c) 停留点の (3次元) 座標 $(x, y, f(x, y))$ を求め、(極大点、極小点、鞍点等に) 分類せよ。

(d) 原点を含み、 $z \geq 0$ である領域 K について、 $\int_K f(x, y) dx dy$ を求めよ。

6. 原点を中心とする半径 a の球を、 z 軸を軸とする半径 b の円筒でくり抜いた内側の部分の体積を V とする。
($0 < b < a$)

V を求める累次積分の式を、極座標を使って表せ。また V を求めよ。