- 置換を使わない行列式の定義もある(この教科書にはないけど)
  - 帰納法的に $\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|$ を定義したもの。
  - この定義が同じであるということを示さなければいけない。
  - p.72の定義では、各行から何かをとってきたものの積のすべての置換の仕方が列の番号になっているときの和。(置換の個数は n 次正方行列で $n!$ 個)

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma) a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma) a_{12} a_{2\sigma(2)} \cdots + \cdots$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots \boxed{+ \ a_{12} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots} + \cdots$$

マイナスになるはず

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

$$\Big\downarrow \ \sigma(1) = 1$$

$$\tilde{\sigma} : \{2, \dots, n\} \to \{2, \dots, n\}$$

$$\{\sigma(2), \cdots \sigma(6)\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$\begin{tikzcd}
\sigma : \begin{Bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix} \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "\mu"] & \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\5\\6\end{Bmatrix} \arrow[r, "{(3,4)}"'] & \begin{Bmatrix}1\\2\\4\\5\\6\end{Bmatrix} \arrow[r, "{(2,3)}"'] & \begin{Bmatrix}1\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix} \arrow[r, "{(1,2)}"'] & \begin{Bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}
\end{tikzcd}$$

置換じゃない?

$$\sigma = (3,4)(2,3)(1,2)\mu$$

$$\mu \in S_{n-1}$$

- 勉強してちゃんと説明できるように。

○ 置換式のメリット

A n次行列 $|{}^tA| = |A|$ の証明.

$${}^tA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \qquad b_{ij} = a_{ji}$$

$$|{}^tA| \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum \varepsilon(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-n}(n)}$$

もし
$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$
?

A n次

$|A| \neq 0 \iff$ 基本変形をくり返して簡約階段行列に変形すると単位行列になる。

$\Updownarrow$

nステップしかないから、

$$\begin{pmatrix} 1 & \to & & & \\ & 1 & \to & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ になる。1のあるところは0になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

こうなったら、
行列式は各行から必ず1つもってくるから
各項0

Aは基本行列の積

$\Updownarrow$

Aは逆行列をもつ

- 基本行列をかけたら単位行列になった
- 基本行列の逆行列は基本行列

小行列

$n \times m$ 行列

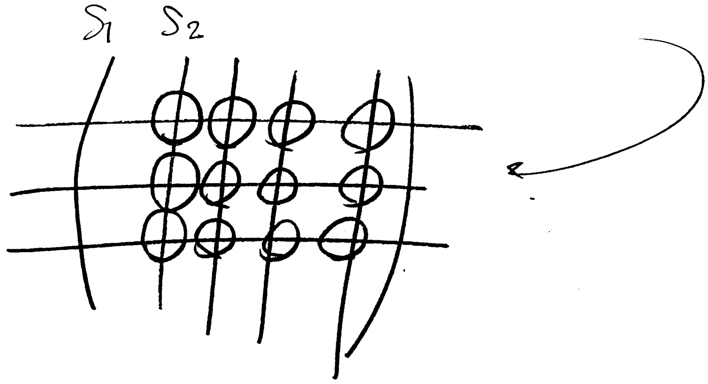
てきとうに s 個の行をとる

〃 s 個の列 〃。

その交点になる成分だけとってくると、

$s \times s$ 行列ができる。(正方じゃなくてもいい)

S_1 S_2



$m, n \geq S_1$

$m, n \geq S_2$

Aのランク $\overset{=}{\text{def}}$ Aの簡約階段行列~~が~~の0ではない行の個数

↓

<u>定理</u> $\mathrm{rank}(A) = \max\{ s \mid$ Aのある s 次小行列の行列式が0でない $\}$

定理 21 ファンデルモンドの行列式