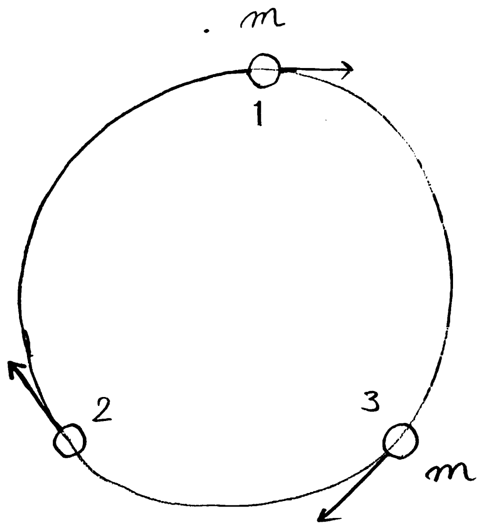
問題 1.15



運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_3) + k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$, $x_3 = A_3 e^{i\omega t}$

として代入すると、

$e^{i\omega t}$ で割って、 $\lambda = \dfrac{k}{m}$ とおいて、

$$\begin{cases} (\omega^2 - 2\lambda) A_1 + \lambda A_2 + \lambda A_3 = 0 \\ \lambda A_1 + (\omega^2 - 2\lambda) A_2 + \lambda A_3 = 0 \\ \lambda A_1 + \lambda A_2 + (\omega^2 - 2\lambda) A_3 = 0 \end{cases}$$

係数行列をつくって.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2-2\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \omega^2-2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \omega^2-2\lambda \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

$A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 以外の解をもつためには、$\det M = 0$.

$$\det M = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2-2\lambda)\left\{(\omega^2-2\lambda)-\lambda^2\right\} - \lambda\left\{\lambda(\omega^2-2\lambda)-\lambda^2\right\} + \lambda\left\{\lambda^2-\lambda(\omega^2-2\lambda)\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2\left(\omega^4-6\lambda\omega^2+9\lambda^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2\left(\omega^2-3\lambda\right)^2 = 0$$

よって、

$$\omega_1 = 0, \quad \underbrace{\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{3\lambda}}_{\text{規準振動数は大きさで考えればよいので}} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (\text{重解})$$

振幅比は、

$\omega_1 = 0$ のとき、

$$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 1 : 1$$

$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$ のとき、

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

これをみたす線形独立な振幅比.

$$A_1 : A_2 : A_3$$

$$A_1' : A_2' : A_3'$$

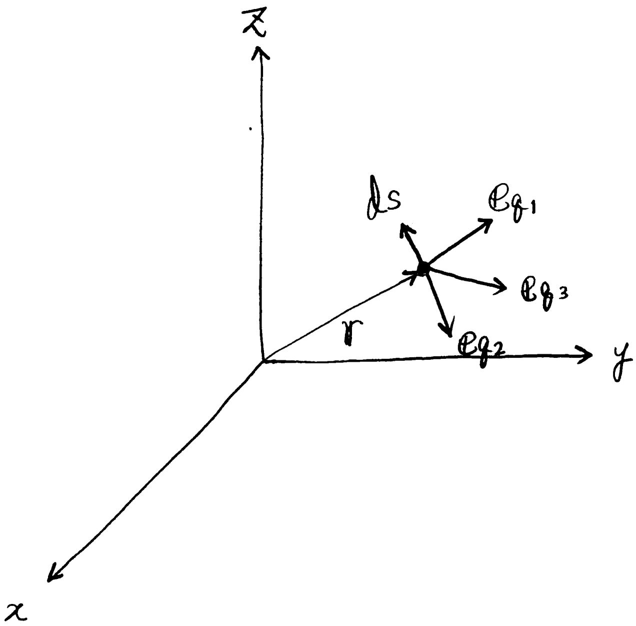
$$A_1 A_1' + A_2 A_2' + A_3 A_3' = 0$$ （線形独立）

任意性がある。例えば、

$$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 0 : -1$$

$$A_1' : A_2' : A_3' = 1 : -2 : 1$$

8章 座標変換



- 長さはどう変換されるのか？

$$(x, y, z) \longrightarrow (q_1, q_2, q_3)$$

短い長さ ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{カーテシアン})$$

$$(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

$r\sin\theta\sin\phi$ $\quad$ $r\cos\theta$

新しい座標系の関数になる。

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x_1}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} dq_i$$

$$dx_2 = \qquad = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_2}{\partial q_i} dq_i$$

$$dx_3 = \qquad = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_3}{\partial q_i} dq_i$$

まとめると、

$$dx_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} dq_i$$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
&= \sum_k (dx_k)^2 \\
&= \sum_k (dx_k)(dx_k) \\
&= \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} dq_i \right) \left(\sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j \right) \\
&= \sum_i \sum_j \underbrace{\left(\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right)}_{h_{ij}} dq_i dq_j
\end{aligned}$$

$$\therefore \ ds^2 = \sum_i \sum_j h_{ij} dq_i dq_j$$

ここまでは一般的な話
ここから座標系に対して条件をつける。

$i \neq j$ のときに $h_{ij} = 0$ となるような q_1, q_2, q_3 をえらぶ

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & h_{13} \end{pmatrix}$$ となるということ.

$$ds^2 = \sum_i \sum_j h_{ij}\, dq_i dq_j$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11} & & \\ & h_{12} & \\ & & h_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = h_{11}(dq_1)^2 + h_{12}(dq_2)^2 + h_{13}(dq_3)^2$$

$\sqrt{h_{11}} = h_1$, $\sqrt{h_{12}} = h_2$, $\sqrt{h_{13}} = h_3$ とおくと.

$$ds^2 = (h_1\, dq_1)^2 + (h_2\, dq_2)^2 + (h_3\, dq_3)^2$$

$dx_i \longrightarrow \underbrace{h_1\, dq_i}_{\text{局所的直交座標系}}$ は直交変換.

単位ベクトルの変換

$$e_{q_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{h_i\, \partial q_i} e_{x_k}$$

$$e_{q_1} = \frac{\partial x_1}{h_1 \partial q_1} e_{x_1} + \frac{\partial x_2}{h_1 \partial q_1} e_{x_2} + \frac{\partial x_3}{h_1 \partial q_1} e_{x_3}$$

- 具体的にカーテシアン座標の位置・速度・加速度ベクトルを他の座標系に変換してみよう。

  - 2次元極~~(円筒)~~座標，円筒座標

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (2.23)$$

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z \qquad (2.24)$$

h_1, h_2, h_3 を計算する。(2.25)

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

$$= 1$$

$$h_2^2 =$$