行列式の定義と性質

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2個の置換を全部考える。

(1), (1 2)

sign = −1

例として これを σ とおくと、

$$\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle 1, \sigma(1) \rangle = \langle 1, 2 \rangle \to a_{12} \\ \langle 2, \sigma(2) \rangle = \langle 2, 1 \rangle \to a_{21} \end{cases}$$

$$(a_{i\sigma(i)} \ : \ i = 1, 2)$$

$$\mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} = -1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

これを τ とおくと、

$$\mathrm{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22}$$

すべての置換を動いて和をとる

↓

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

11　8　13　9

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3個の 置換

(1) $(1\ 2)$ $(1\ 3)$ — τ

$(2\ 3)$ $(1\ 2\ 3)$ $(1\ 3\ 2)$ — σ

$$\mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)}$$
$$= 1 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

$$\mathrm{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)}\, a_{3\tau(3)}$$
$$= -1 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$\vdots$$

6つの置換の和をとる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n個の置換全体の集合 $= S_n$

$\left.\begin{matrix} (1)\ (1\ 2)\ \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{matrix}\right\}$ $n!$ 個

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ で定義する。

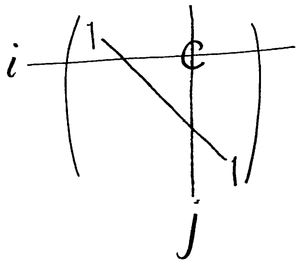
($n!$個ある)

定理　A, B を n 次正方行列とすると、

$$|AB| = |A||B|$$

(p.80-82 とは別の証明をする。)

◦ 基本行列の行列式



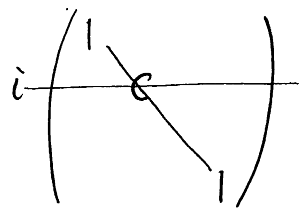
j行をc倍して
i行に加える。

↓

行列式の定義のうち、
置換は(1)しか
0を含まない積は
ないから、

$$|A| = \sum_{\sigma\in\{(1)\}} \underbrace{\overset{\text{sign}(\sigma)}{\varepsilon(\sigma)}}_{\substack{1\\(\text{恒等置換})}} \underbrace{a_{1\sigma(1)}}_{1}\, \underbrace{a_{2\sigma(2)}}_{1} \cdots \underbrace{a_{n\sigma(n)}}_{1}$$

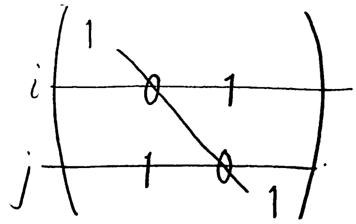
$= 1$



i行をc倍
する。

↓

$|A| = c$



i行とj行の交換

↓

$(i\ j)$のみ

$$|A| = \underbrace{\text{sign}(\sigma)}_{=-1}\ \underbrace{a_{1\sigma(1)}}_{1} \cdots \underbrace{a_{n\sigma(n)}}_{1}$$

$= -1$

- 何故こんなことをしているのか？
  どんな行列も基本変形でかんたんな行列にできる。

> • Qを基本行列とまずしよう。（Bは任意）
>
> $$|QB| = |Q||B| \quad (\text{補題})$$

これができたら、
前の証明ができる

簡約階段

$$
\left| Q_k \cdots Q_1 A \right| = \left| \left(\tilde{A} \right) \right| \longrightarrow
\begin{cases}
\text{単位行列} \ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} & \det = 1 \\[2ex]
\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \det = 0
\end{cases}
$$

$\downarrow$ 補題が正しければ、

$$
|Q_k| \cdots |Q_1| |A| = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}
$$

$$
|A| = \begin{cases} \dfrac{1}{|Q_k| \cdots |Q_1|} \\[2ex] 0 \end{cases}
$$

レポート

- ある行を c 倍すれば行列式は c 倍になるか？

  定義から考えれば OK だね。

- j 行を r 倍して i 行に加えたら？

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}+ra_{j1} & \boxed{a_{i\sigma(i)}} & a_{in}+ra_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$+ra_{j\sigma(i)}$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \left(a_{i\sigma(i)} + ra_{j\sigma(i)}\right) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)}\, a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\boxed{+r\sum \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)}\, a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}} = 0\ ?$$

どっちか 0 だろってこと？
ちがうよね？

↓

行列式はかわらない（教科書確認するか…）