次回、座標変換

前回のノート2の一般解

$$Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-r^2}\cdot t+\alpha\right)$$

前回のつづき

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell) \\
M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell) + k(x_3 - x_2 - \ell) \\
m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - \ell)
\end{cases}
$$

平衡点からの変位 → x_1', x_2', x_3'

$$\ddot{x}_1' = \frac{k}{m}(x_2' - x_1')$$

$$\ddot{x}_2' = \frac{k}{M}(x_3' - 2x_2' + x_1')$$

$$\ddot{x}_3' = \frac{k}{m}(x_3' - x_2')$$

↓

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= A_1 e^{i\omega t} \\
x_2' &= A_2 e^{i\omega t} \\
x_3' &= A_3 e^{i\omega t}
\end{aligned}\right\}$$ とおいて代入（規準振動はこうなると想定）

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} = \dfrac{k}{m}(A_2 - A_1) e^{i\omega t} \\ -\omega^2 A_2 e^{i\omega t} = \dfrac{k}{M}(A_3 - 2A_2 + A_1) e^{i\omega t} \\ -\omega^2 A_3 e^{i\omega t} = -\dfrac{k}{m}(A_3 - A_2) e^{i\omega t} \end{cases}$$

よって、

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) A_1 + \frac{k}{m} A_2 = 0 \\ &\frac{k}{M} A_1 + \left(\omega^2 - 2\frac{k}{M}\right) A_2 + \frac{k}{M} A_3 = 0 \\ &\frac{k}{m} A_2 + \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) A_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{——} (*)$$

$(*)$ は、

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & \omega^2 - 2\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

もし A^{-1} が存在すると、

$$A^{-1}A\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=0 \qquad \therefore \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=0$$

よって、 $A_1=A_2=A_3=0$ 以外の解をもつためには、

$$\det A = 0$$

でなければならない。

$$\det A = 0$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)\left(\omega^2-\frac{k}{m}-2\frac{k}{M}\right)=0$$

$$\therefore \omega^2 = 0,\ \frac{k}{m},\ \frac{k}{m}+2\frac{k}{M}$$

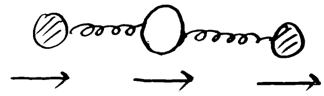
$$\therefore \omega = \underbrace{0}_{\omega_1},\ \underbrace{\pm\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega_2},\ \underbrace{\pm\sqrt{\frac{k}{m}+2\frac{k}{M}}}_{\omega_3}$$

規準振動数

(1) $\omega = \omega_1 = 0$ のとき、(*)は、

$$\begin{cases} -A_1 + A_2 = 0 & (A_1 = A_2) \\ A_1 - 2A_2 + A_3 = 0 & \\ A_2 - A_3 = 0 & (A_2 = A_3) \end{cases}$$

$\therefore\ A_1 = A_2 = A_3$

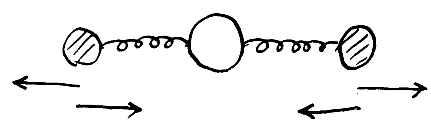


(並進)

(2) $\omega = \omega_2$ のとき、(*)は、

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ \frac{k}{M}A_1 + \left(\frac{k}{m} - \frac{2k}{M}\right)A_2 + \frac{k}{M}A_3 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

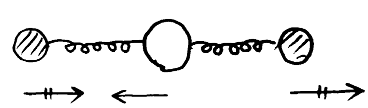
$\therefore\ A_2 = 0,\quad A_1 + A_3 = 0$



(3) $\omega = \omega_3$ のとき、(*)は、

$$\begin{cases} \frac{2k}{M}A_1 + \frac{k}{m}A_2 = 0 \\ \frac{k}{M}A_1 + \frac{k}{m}A_2 + \frac{k}{M}A_3 = 0 \\ \frac{k}{m}A_2 + \frac{2k}{M}A_3 = 0 \end{cases}$$

$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : -\frac{2m}{M} : 1$



計算用紙.

$$\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)\left\{\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}-\frac{k}{m}\left\{\frac{k}{m}\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{k}{m}\left\{\left(\frac{k}{m}\right)^2-\frac{k}{m}\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)\right\}$$

$$=\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)^3-\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)+\left(\frac{k}{m}\right)^3$$

$$+\left(\frac{k}{m}\right)^3-\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)$$

$$=\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)^3+2\left(\frac{k}{m}\right)^3-3\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2-2\frac{k}{m}\right)$$

帰宅後

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & \omega^2 - 2\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left\{\left(\omega^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m}\cdot\frac{k}{M}\right\} - \frac{k}{M}\left\{\frac{k}{m}\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\right\} = 0$$

$$\left(\omega^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\cancel{\Big)^2}\right. - 2\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{m}\cancel{\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)} = 0$$

$$\cancel{\omega^4 - \frac{k}{m}\omega^2 - 2\frac{k}{M}\omega^2 + 2\cdot\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{m} - 2\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{m} = 0}$$

$$\cancel{\omega^2\left(\omega^2 - \frac{k}{m} - 2\frac{k}{M}\right) = 0}$$

消さない。
0になることがあるだろう。

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\omega^4 - \frac{k}{m}\omega^2 - 2\frac{k}{M}\omega^2 + \cancel{2\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{m}} - \cancel{2\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{m}}\right) = 0$$

$$\omega^2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m} - 2\frac{k}{M}\right) = 0$$