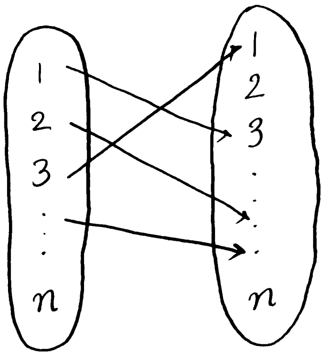
置換

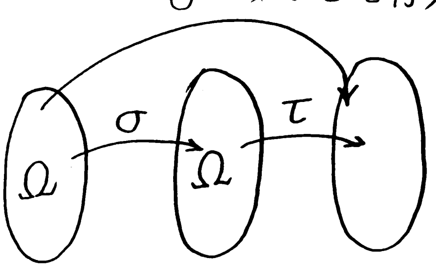
- 操作にのみ興味がある



n点集合

- 席換え操作は写像
  - 1つの席に2人以上移動しない
    (単射)
  - 有限集合で席の数と人の数
    (写像前の集合と後の集合)が同じなら、
    単射ならば、全射である。
    ↓
    全単射

σの後でτを行う(これも写像)



$\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$

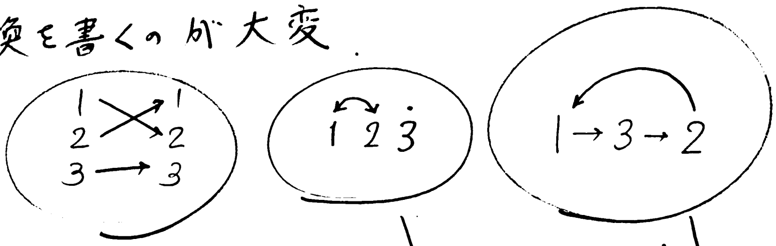
$\tau : (\sigma : \Omega \to \Omega) \to \Omega$

⇓

$\tau\sigma$ で表す
(関数的な)

(群論とか専門の人は $\sigma\tau$ って
書くらしい(明記しましょう))

- 置換を書くのが大変



大変.

↓

中かっこがついていたら反時計回りだよというルールを決め

↓

(1 2)(3)　(1 3 2)

カンマつけてもいいよ.

・全単射がいいのは、元に戻れる

(1 3 2) を元に戻す操作は？

↓ くるっとひっくりかえして

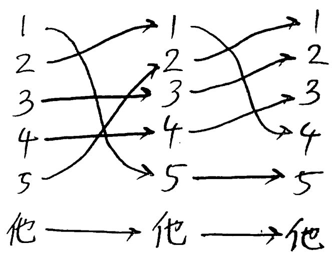
(2 3 1)

これは円なので円をぐるぐるまわしても同じ

(3 1 2)　(1 2 3)

(1 5 2)(1 4 3 2)

動かない数字は記載しない
(同じ所, (4) とか)



○ 互換 (i, j)

すべての置換は互換の積で書ける。

しかも、互換の個数の偶奇は、与えられた置換によって決まる。

$$(1\ 3\ 2) = \underleftarrow{(2\ 3)(1\ 2)}$$

右から作用

$$\left(= (2\ 3)(1\ 2)\underbrace{(1\ 2)(1\ 2)}_{\text{何もかわらない}} \right)$$

分割にかかわらずに互換の個数の偶奇は決まる？

↓

分割にかかわらないことを示すには、分割を使わず示す？

置換 $\sigma : \Omega \to \Omega$

全単射

$\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$

定義：

$$\frac{(\sigma(2)-\sigma(1))\cdots(\sigma(i)-\sigma(j))\cdots(\sigma(n)-\sigma(1))}{(2-1)(3-2)(3-1)\cdots(i-j)\cdots(n-(n-1))\cdots(n-1)}$$

$(i > j)$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \quad \left(\longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) \text{ で表す} \right)$$

主張： これは $+1$ または -1

全単射だから、…

これは σ によって決まる。（互換の積とは無関係）

$$\sigma \longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) \in \{\pm 1\}$$

$$(i, j)\sigma \longrightarrow \mathrm{sign}((i, j)\sigma) = -\mathrm{sign}(\sigma)$$

証明

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sign}(\sigma) &= \prod_{s>t} \frac{\sigma(s)-\sigma(t)}{s-t} \\ \mathrm{sign}\big((i,j)\sigma\big) &= \prod_{s>t} \frac{(i,j)\sigma(s)-(i,j)\sigma(t)}{s-t} \end{aligned}\right\} \text{ちがい}$$

$$\{\sigma(s), \sigma(t)\} = \{i, j\}$$

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= i, & \sigma(t) &\neq j \\ &= j, & &\neq i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= i, & \sigma(s) &\neq j \\ &= j & &\neq i \end{aligned}$$

$$\{\sigma(s)\,\sigma(t)\} \cap \{i, j\} = \phi$$

(i,j) 置換で、

$$\begin{array}{ccc} \sigma(s) = i & , & \sigma(t) \neq j \\ \downarrow & & \neq i \\ j & & \downarrow \\ & & \sigma(t) \end{array}$$

$$\sigma(s) - \sigma(t) = i - \sigma(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$j - \sigma(t)$$

定理3.4

$k \neq i, j$

$(i - j) \quad (i - k) \quad (j - k)$

行列式の計算するとき、偶置換・奇置換を憶えなくちゃいけない？

↓

置換を見たら、偶奇を判別する必要あり。

判別法

置換の積はsignの積

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau)$$

• 巡回置換

$$\mathrm{sign}((i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)) = (-1)^{k+1}$$

偶数個 ⟶ 奇置換

次回は実際に行列式の定義