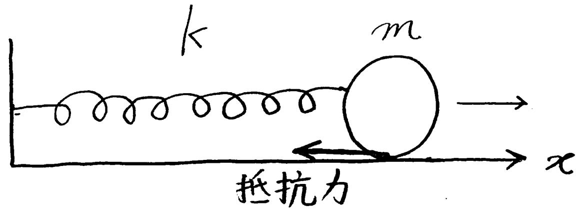
7.2 減衰振動



速度に比例した抵抗 $q\dot{x}$ ($q > 0$ 定数) が働くとき、
運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - q\dot{x} \qquad (2階線形)$$

$x = e^{\lambda t}$ とおいて代入すると、

$$m\lambda^2 + q\lambda + k = 0 \qquad (特性方程式)$$

$$\therefore \lambda = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4mk}}{2m}$$

(1) $q^2 < 4mk$ のとき

$$\lambda = \frac{-q \pm i\sqrt{4mk - q^2}}{2m}$$

$$= -\gamma \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} \qquad \left(\gamma = \frac{q}{2m} \text{ とおいた}\right)$$

一般解は、

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}\cdot t} + C_2 e^{-\gamma t - i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}\cdot t}$$

$$= A\underbrace{e^{-\gamma}}_{\text{減衰を表す}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}\cdot t + \alpha\right) \quad \text{減衰振動}$$

抵抗力がなければ $\beta \to 0$
置換したので $\gamma \to 0$ より、
普通の単振動の式が出てくる
ことがわかる。

(2) $\beta^2 > 4mk$

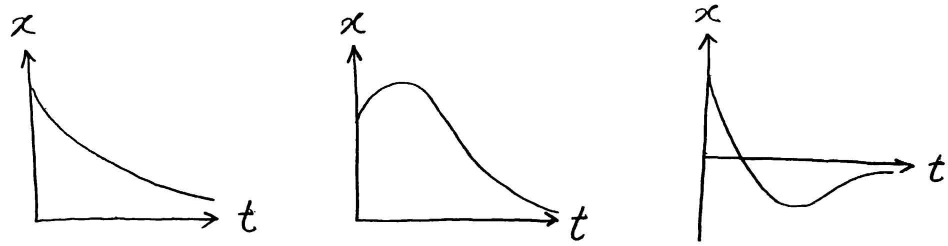
$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$$

$$= -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}_{\text{ここは}\sqrt{\gamma^2}\text{より小さいので}} < 0$$

一般解は、

$$x = C_1 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}\cdot t} + C_2 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}\cdot t}$$

γ の値によって減衰のしかたが３パターンある。



微分してみればわかるらしい。

(3)　$f^2 = 4mk$ のとき

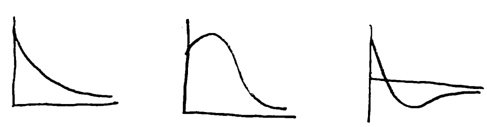
$$\lambda = -\gamma \quad \text{(重解)}$$

先週の内容

$$\therefore\ x = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$$

（限界減衰）

パターンは (2) と同じ。（関数としてはちがうけど）



7.3 強制振動

外力 $ma\cos\omega t$ を加えるとき、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx + ma\cos\omega t$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ として、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t \quad \text{———} \quad (*)$$

($a = 0$ なら斉次方程式で一般解は $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$。)

(**) 斉次方程式の一般解

(1) $\omega \neq \omega_0$ のとき、

$x = C\cos\omega t$ とおいて、(*) に代入すると、

$$-\omega^2 C + \omega_0^2 C = a$$

$$\therefore C = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

よって特解は、

$$x = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \quad \text{———} \quad (***)$$

非斉次方程式の特解

斉次方程式の一般解に、非斉次方程式の特解を加える

一般解は、(**) と (***) の和で与えられる。

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

ω_0 と ω が近いとここが卓越する

(2) $\omega = \omega_0$ のとき、

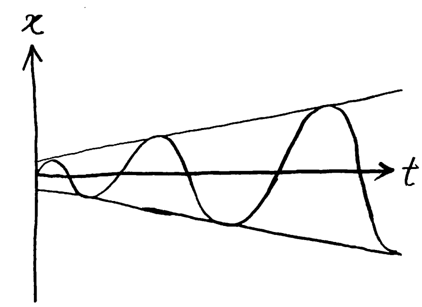
$x = Dt\cos(\omega_0 t + \alpha)$ とおいて (＊) に代入。

$$D = \frac{a}{2\omega_0}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = \frac{a}{2\omega_0} t \sin\omega_0 t$$

よって一般解は、

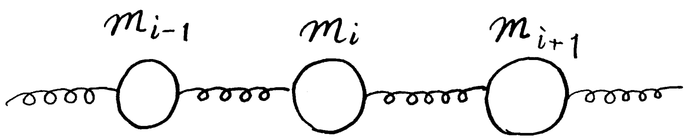
$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{a}{2\omega_0} t \sin\omega_0 t$$



ω を ω_0 に近づけた極限の式はこうなる。

(共振 or 共鳴)

7.4 連成振動



微小振動とする。

(振動の振幅の2乗以上の項が無視できる。(線形振動))

↕

非線形振動

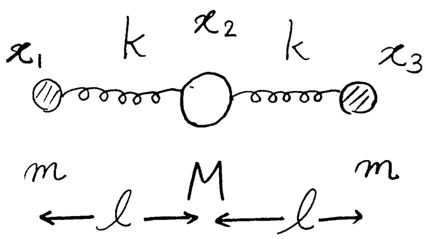
定理

n個の自由度をもつ質点系の微小振動は、
n個の$\underbrace{\text{単振動}}_{\text{規準振動}}$の合成で表わされる。

規準振動の振動数を、$\underbrace{\text{規準振動数}}_{\text{これを求める問題}}$という。

規準振動数が同じ値で重なるとき、「縮退」という。
縮退があるときの規準振動は、線形独立(直交する)解。

○ 線状3原子分子



初期状態、

$$\left.\begin{aligned} x_2^0 - x_1^0 &= l \\ x_3^0 - x_2^0 &= l \end{aligned}\right\} \text{自然長}$$

運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l)$$

$$M\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1 - l) - k(x_3 - x_2 - l)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - l)$$

初期（平衡点）からの変位を x_1', x_2', x_3' で表す。

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_1^0 \\ x_2' = x_2 - x_2^0 \\ x_3' = x_3 - x_3^0 \end{cases} \quad \text{とすると、}$$

$$\ddot{x}_1' = \frac{k}{m}(x_2' - x_1')$$

$$\ddot{x}_2' = \frac{k}{m}(x_3' - 2x_2' + x_1')$$

$$\ddot{x}_3' = \frac{k}{m}(x_3' - x_2')$$

次回つづき