6.1.1 一様連続

~~$^{\forall}\varepsilon > 0$, $^{\exists}\delta > 0$~~

$A \subset \mathbb{R}^2$,

$^{\forall}\varepsilon > 0$, $^{\exists}\delta > 0$, $^{\forall}x, y \in A$:

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

1点で連続

$f(x, y)$ が点 $a = (a, b)$ で連続

$^{\forall}\varepsilon > 0$, $^{\exists}\delta > 0$, $^{\forall}x = (x, y)$ に対し、

$$d(x, a) < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

204
5.7.1 ～ 5.7.9

領域で連続

一様

一様の場合逆になる
(厳しくなる)

$f(x, y)$ が領域 A で連続

$^{\forall}\varepsilon > 0$, $^{\forall}a \in A$, $^{\exists}\delta > 0$, $^{\forall}x \in A$ に対し、

$$d(x, a) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

6.1.2　平面の点集合 A が有界閉集合なら、
A 上の連続関数は一様連続である。

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A$$
$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Big\downarrow \text{否定}$$

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ d(x, y) < \delta$$
で かつ、$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

ある正の数 ε をとると、
どんな正の数 δ に対しても、
A の 2点 x, y で、$d(x, y) < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
なるものがある。

いま

6.1.3, 6.1.4

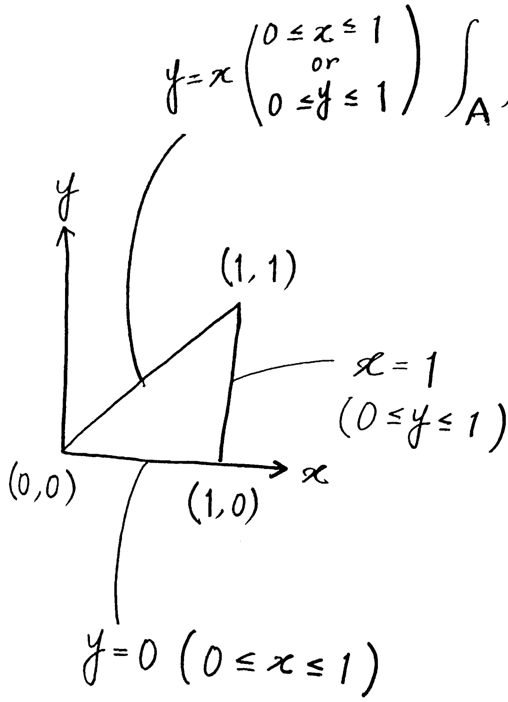
6.1.5　E上連続な関数は積分可能である。

5.7.9 によって f は有界、
6.1.2 によって f は一様連続。

6.1.8 累次積分

3点 (0,0), (1,0), (1,1) を頂点とする三角形Aでの

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$$



$$A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1 \right\}$$

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_y^1 f(x,y)\,dx \right] dy$$

$f(x) = (x+y)^2$ として.

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)^2\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^x$$

$$= \int_0^1 \frac{7}{3}x^3\,dx$$

$$= \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{12}$$

∘ 1a $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{2x} (x+y)\,dy$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 4x^2\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

∘ 1b $\displaystyle\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)\,dx$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{\frac{y}{2}}^1 dy$$

$$= \int_0^2 \left\{\left(\frac{1}{2} + y\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\right\} dy$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{5}{8}y^2 + y + \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= \left[-\frac{5}{24}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y\right]_0^2$$

$$= -\frac{5}{24}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 \quad = \frac{4}{3}$$

∘ 1c. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{x+y}\,dy$

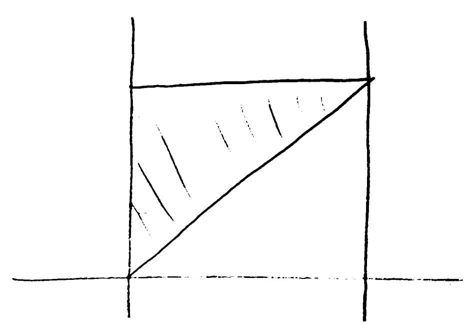
$$= \int_0^1 \left[e^{x+y}\right]_x^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x+1} - e^{2x}\right) dx$$

$$= \left[e^{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \left(e^2 - \frac{1}{2}e^2\right) - \left(e^1 - \frac{1}{2}e^0\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$$



1c

○ $f(x,y) = f(y,x)$ より.

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{x+y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[e^{x+y} \Big]_0^1 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x+1} - e^{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^{x+1} - e^{x} \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(e^2 - e\right) - \left(e^1 - e^0\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$$