6.3　1階線形微分方程式

一般形

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \text{———} \quad (*)$$

$Q(x) = 0$ の場合を"斉次方程式"

$Q(x) \neq 0$　〃　"非斉次方程式"

(1) 斉次方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

変数分離より、

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

積分して、

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx + C$$

$$\therefore \log y = -\int P(x)\,dx + C$$

$$\therefore \quad y = Ae^{-\int P(x)dx}$$

(2) 非斉次方程式 ⟵ 斉次の解き方を利用して、定数変化法というのを使う。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Aをxの関数としておく。

$$y = A(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

(*)に代入すると、

$$\left(A'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} - \cancel{A(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}}\right) + \cancel{P(x)A(x)e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)$$

$$\therefore \quad A'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\therefore \quad A'(x) = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

積分して、

$$A(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} + C$$

よって、

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right)$$

(例) $\dfrac{dy}{dx} = -xy - x \longrightarrow \begin{array}{l} P(x) = x \\ Q(x) = -x \end{array}$ なので、

$$y = e^{-\int x dx}\left(\int(-x)e^{\int x dx} + C\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\int(-x)e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right)$$

これはよく考えないとだな。

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right)$$

6.4 高階線形微分方程式

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x)$$

(1) 斉次方程式

n個の独立な特解を $y_1, y_2, \ldots, y_n$ とすると、
一般解は、

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

非斉次の場合は、非斉次方程式の特解を加える。

(例) o 定数係数の斉次線形微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$y \equiv e^{\lambda x}$ とおいて代入

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$ 特性方程式

- この$\overbrace{\text{方程式}}^{\lambda の}$の解が全て異なるとき、
  $y = e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ が独立な特解を与えている。
  一般解は、これらの線形和として、

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

- m重解 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m)$ があるときは、

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_m x^{m-1} e^{\lambda_m x} + C_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

証明は十分条件はかんたんらしい。

(例) ばねによる運動

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

(2階斉次線形微分方程式)

解を以前は三角関数と仮定したが、三角関数だけかどうか分からないよね？

$\frac{k}{m} = \omega^2$ とおく。

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおいて代入

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{特性方程式}$$

$$\therefore \lambda = \pm i\omega$$

独立な解は、

$$x = e^{i\omega t},\ e^{-i\omega t}$$

一般解は、

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

これは、

$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ に一致する。

※ オイラーの公式

$$e^{ix} = A\cos x + B\sin x \quad \text{とおくと、} \qquad ①$$

微分して、

$$ie^{ix} = -A\sin x + B\cos x \qquad ②$$

①, ② に $x=0$ を入れると、

$$1 = A, \quad i = B$$

よって、

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\left(\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \right)$$

7章
振動
7.1 単振動

$$m\ddot{x} = -kx$$

$x = e^{i\omega t}$ とすると、

$$-m\omega^2 e^{i\omega t} = -k e^{i\omega t}$$

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm\omega_0$$ とおく。

ω_0を"固有振動数"といい、
そのときの振動を、"固有振動"という。

周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

一般解

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1' \cos\omega_0 t + C_2' \sin\omega_0 t \\ &= A\cos(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned}$$

A : 振幅

α : 初期位相