§3 積分法

部分積分とは？とか、何故微分の逆演算になるのか？などをやる。

○ 定積分の定義

高校の数学では、積分を次のように定義した。

(1) 「微分すると $f(x)$ になる関数」を、
$f(x)$ の原始関数と呼び、$\int f(x)\,dx$ と表す。

(2) 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を、
$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ と定義する。
ただし、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の1つ。

(3) 微分積分学の基本定理
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ が成り立つ。 ← あたりまえじゃん、という感じになる。

この順序は歴史的にはおかしい。

(1) 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を、(符号つきの)面積として定義する。
(定義をする段階では微分と無関係)

(2) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ を考える。
これは $F'(x) = f(x)$ をみたす。 ← 基本定理

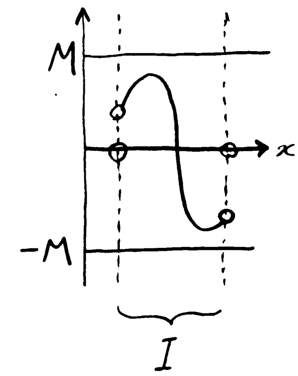
(3) したがって、「微分すると $f(x)$ になる関数」$F(x)$ を見つければ、定積分が計算できる。

定義 (p.77)　関数 f が $\overbrace{\text{区間}}^{I}$ において有界であるとは、

有界

$$^{\exists}M > 0,\ ^{\forall}x \in I \ : \ |f(x)| \leq M$$

であるときにいう。



例. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は、区間 $I = (0,1)$ において有界ではない。

以下、関数 f は、閉区間 $[a,b]$ において有界であるとする。
このときに、定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を定義しよう。

どんな関数をもってきても定義できるわけじゃない

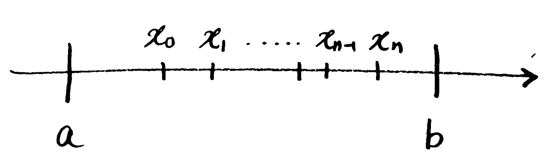
Step1

分割

(有限)数列 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ が、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

をみたすとき、
数列 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ は、$[a,b]$ の分割であるという。



$I = [a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ に対して、

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

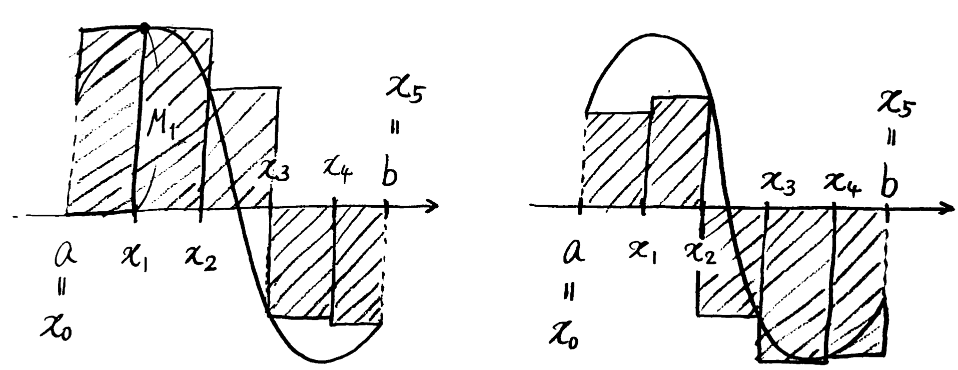
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

とおく。このとき、

$$\overline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{過剰和}$$

$$\underline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{不足和}$$

と定める。



過剰和　　　　不足和

ダルブー？

- 分割を細かくすると、
  過剰和は小さく、不足和は大きくなる。

ちゃんと証明できるけど絵描いてごまかすよ。

Step 2

$I = [a, b]$ の分割をすべて考えて、

$$\overline{S}(f) = \inf \left\{ \overline{S}(f; \Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } I \text{ の}\overset{\text{すべての}}{\vee}\text{分割} \right\}$$ 過剰積分

$$\underline{S}(f) = \sup \left\{ \underline{S}(f; \Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } I \text{ の分割} \right\}$$ 不足積分

と定める。

関数 f は区間 I において有界であることから、

(1) $\overline{S}(f)$, $\underline{S}(f)$ は有限の値に定まる。

(2) $\overline{S}(f) \geq \underline{S}(f)$

が成り立つことを証明できる。

この辺の証明は、時間があったら春学期の最後にやる。

定義 (p.105)　以上の記号を使って、

$\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ が成り立つとき、

関数 f は $[a, b]$ においてリーマン積分可能であるといい、

この等しい値 $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ を、

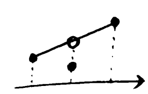
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書いて、f の定積分と呼ぶ。

ルベーグ積分は定積分の定義の仕方がちがう。

○ 次のような関数は、リーマン積分可能であることが証明できる。　ただし、簡単ではない。

(1) 連続関数 (定理 3.14, p.106)　時間があれば春の最後に証明。

(2) 区分的に連続な関数 (p.108)



(3) 単調関数 (定理 3.15, p.107)

例 (リーマン積分可能でない)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ は有理数}) \\ 0 & (x\text{ は無理数}) \end{cases}$$

は、

任意の閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ において、リーマン積分可能でない。

$\left(\begin{array}{l} M_i = 1,\ m_i = 0 \text{ なので、} \\ \overline{S}(f;\Delta) = b - a \\ \underline{S}(f;\Delta) = 0 \\ \text{のまま近づかない。} \end{array} \right)$

○ 定積分とリーマン和

区間 $I = [a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ に対し、

$$|\Delta| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|$$

と定める。 ⟵ 幅 or メッシュサイズ

分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ と、

$x_{i-1} \le \xi \le x_i \quad (i = 1, \dots, n)$ をみたす

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ をとって定まる和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

をリーマン和という。

こんどは sup や inf ではなく、分割の中の任意の点から短冊の高さを決めてるんだ。

↓

定理 3.13 (p.105)

関数 f が閉区間 $[a, b]$ においてリーマン積分可能ならば、

区分求積法

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ。