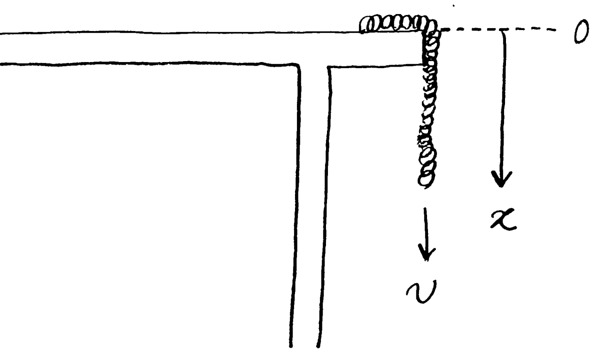
問題 1.12



問1.　台の上の鎖は、静止しているので、　←先週のノート1枚目. ポイント①

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}$$

たれ下がった鎖の質量は、λx

$$\therefore P = \lambda x v$$

一方、$F = \lambda x g$ なので、　←重力だけでいいの?

$$\frac{d}{dt}(\lambda x v) = \lambda x g$$

問2. λは一定なので 両辺をλで割って、

$$\frac{d(xv)}{dt} = xg \quad\text{——— (*)}$$

$v = \dfrac{dx}{dt}$ なので、

(ポイント② 変数変換 $\dfrac{d(xv)}{dt} = \dfrac{d(xv)}{dx}\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt} = v$)

$$v\frac{d(xv)}{dx} = xg$$

$$\therefore\ xv\frac{d(xv)}{dx} = x^2 g$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(xv)^2\right] = x^2 g$$

これを積分して、

$$\int_0^x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(xv)^2\right]dx = \int_0^x x^2 g\,dx$$

$$\frac{1}{2}(xv)^2 = \frac{1}{3}x^3 g$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gx}$$

(自由落下だと $v = \sqrt{gx}$ になるよね.)

$$\frac{d(xv)}{dt} = xg$$

問3. （＊）より、

$$xa + v^2 = xg$$

問2より、

$$xa + \frac{2}{3}gx = xg$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}g$$

問4.

$$t = \int_0^x dt = \int_0^x \frac{dt}{dx}dx = \int_0^x \frac{dx}{v}$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}gx}}$$

$$= \sqrt{\frac{6x}{g}}$$

問5. 運動エネルギー

$$T = \int_0^x \frac{1}{2}\lambda v^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\lambda v^2 x$$

問2 代入

$$= \frac{1}{3}\lambda g x^2$$

位置エネルギー

$$U = -\int_0^x \lambda g x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda g x^2$$

(重心が $\frac{1}{2}x$ だけ下がる、と考えて $-\frac{1}{2}x \cdot \lambda x g$ でも同じ。)

よって 全エネルギーは、

$$T + U = -\frac{1}{6}\lambda g x^2 \quad (\text{減少})$$

鎖が落ちるとき、完全非弾性衝突を繰り返すことになる。

よって、相対速度のエネルギーが失われ、熱エネルギーに転換される

多体系の話はここまで。
今までは高校の力学をもう一度体系づけた。

次に振動の問題を扱うが、
まず数学(常微分方程式)をまずやる。
次は、一般座標変換を使って、
極座標などの中で運動方程式を解く。
中心力の働く問題を扱う。
最後に、非慣性系を扱う。

6章 常微分方程式

6.1 常微分方程式とその解

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

o 1階の微分方程式を考える(導関数の最高次が1次)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

例.

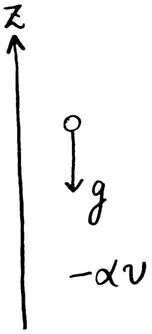
$$\frac{dv}{dt} = a \ (\text{一定}) \qquad \therefore \ v = at + v_0$$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ の方程式

○ 2階の微分方程式（導関数の最高次が2次）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

例　空気抵抗（$= \alpha v$）がある自由落下



$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \alpha v$$

$$= -g - \alpha\frac{dz}{dt}$$

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ の方程式

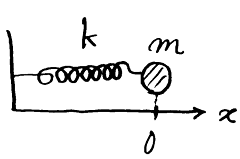
○ n階微分方程式（導関数の最高次がn次）

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

この方程式の解は、n個の任意定数（積分定数）をもち、
これを"一般解"という。
定数にある値を入れた解は、"特別解（特解）"という。

• 一般解は、独立な特解の線形和で書ける。

例．ばねによる振動運動



運動方程式は、

2階
常微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

特解として出てくるのは、

$$x = \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = \sin(\omega t)$$

phaseがちがうから独立らしい。

よって一般解は、

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\downarrow$$

$$v = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)$$

初期条件 $t=0$ で、$x = x_0$, $v = v_0$ ならば、

$$x_0 = C_1$$

$$v_0 = \omega C_2 \quad \left(C_2 = \frac{v_0}{\omega} \right)$$ なので、

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

これは $\frac{d^2x}{dt} = x$ の解が $\sin x$, $\cos x$ に

なることが分かっているから解けたが、

分からない場合どうするのかというのが次の話。

6.2 変数分離形 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$

と書けるとき、変数分離形という。

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

$$\therefore \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$$

例.
$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = -x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x\, dx$$

$$\therefore \log y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = e^C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= A e^{-\frac{1}{2}x^2}$$