多体系の応用のつづき

5.5 質量が変化する運動

今までの運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$ 運動量変化を表していると考えてよい。

質量の時間変化を $\frac{dm}{dt}$ としましょう。

さらにこの物体に相対的な速度 v' がある（反作用で力を受ける）

対して力を及ぼす、質量をもつ物体の

↓

$$m\frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt}v'$$

$$\left(\begin{array}{llll} \frac{dm}{dt} > 0 & \text{のとき} & v' > 0 & \text{なら 加速} \\ \frac{dm}{dt} < 0 & \text{〃} & v' < 0 & \text{〃} \quad \text{(ロケット)} \end{array}\right)$$

v で動いているものに、静止している物体が付着するとき、

静止している物体の、動いている物体から見た相対速度 $v' = -v$

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt}v$$

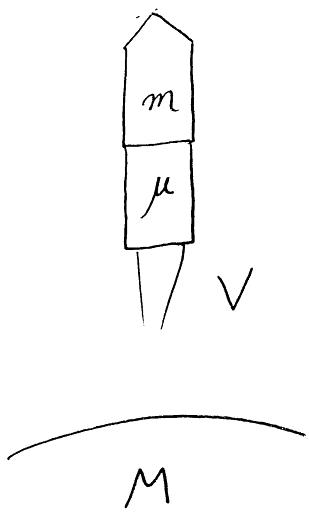
$$\therefore m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = F$$

ニュートンもより一般的には
こう書くべきだと書いている。

$$\frac{d(mv)}{dt} = F$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = F$$

問題 1.13



問1.

$$\underbrace{(m+\mu-\alpha t)}_{\text{ある瞬間の質量}}\frac{dv}{dt} = \underbrace{-(m+\mu-\alpha t)\frac{GM}{R^2}}_{\text{ある瞬間の質量での万有引力}} - \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{\frac{dm}{dt}}}V$$

問2.

まず変形

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^2} - \frac{\alpha V}{m+\mu-\alpha t}$$

$$v = \int_0^t \frac{dv}{dt} dt$$

$$= -\frac{GM}{R^2} t + V \log \frac{m+\mu}{m+\mu-\alpha t}$$

?

問3.

$$h = \int_0^t v dt$$

?

$$= -\frac{1}{2} \frac{GM}{R^2} t^2 + \frac{(m+\mu)V}{\alpha} \left\{ \left(1-\frac{\alpha t}{m+\mu}\right) \log \left(1-\frac{\alpha t}{m+\mu}\right) + \frac{\alpha t}{m+\mu} \right\}$$

$\alpha t = \mu$ として.

$$h = -\frac{1}{2} \cdot \frac{GM}{R^2} \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2 + \frac{(m+\mu)V}{\alpha} \left\{ \frac{m}{m+\mu} \log \left(\frac{m}{m+\mu}\right) + \frac{\mu}{m+\mu} \right\}$$

問4.

全エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = const.$

脱出速度 $r \to \infty$, $v \geqq 0$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$\therefore v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

問5. 問2の結果より、 $\alpha t = \mu$ となるところを見つける。

$$v = -\frac{GM}{R^2} \cdot \frac{\mu}{\alpha} + V \log \frac{m+\mu}{m}$$

$v > v_{esc}$ に代入して α の条件を求める

$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\alpha > \frac{GMm}{R^2} \left(V \log \frac{m+\mu}{m} - \sqrt{\frac{2GM}{R}} \right)^{-1}$$

問題 1.12