連立方程式を解く過程で、
行の基本変形しかしてないから、
x_1, x_2, x_3, x_4 は同じ所にある(第1列, 2列, …)

p.46 2.4 から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 10 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初頭項がない列は任意

$x_3 = \alpha$ (任意)

$x_4 = \beta$ (任意)

⋮

- 行列とベクトルの立場から考える。

i.e. 解ベクトル.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を求めよ。

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 10\beta \\ -2\alpha - 7\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \alpha, \beta \text{ は} \\ \text{任意のスカラー} \end{array} \right\}$$

これが連立方程式の解全体の集合。

解全体の集合はよい性質をみたす。

- よい性質

$$\begin{cases} \bullet\ v, u \in \Omega^{(\neq 0)} \Longrightarrow v+u \in \Omega(\neq 0) \\ \bullet\ \lambda\ (\text{スカラー}),\ v \in \Omega \Longrightarrow \lambda v \in \Omega \end{cases}$$

(これが ベクトル空間 (線形空間) の性質)

$$\begin{pmatrix} \alpha+10\beta \\ -2\alpha-7\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\beta \\ -7\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Ω は次のような線形和で書ける。

$$\Omega = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \alpha, \beta\ \text{任意のスカラー} \right\}$$

○ 基底とは？

ベクトル集合 $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq \Omega$ が、
ベクトル空間 Ω の基底であるとは、

① 一次独立

② Ω の元は全て $v_1, \cdots, v_k$ の線形和で書ける。

一意的に

○

斉次の連立方程式がある。

↓

その解ベクトル全体の集合がある。

↓

あるベクトルの集まり $\{v_1, \dots, v_k\}$ の線形和で書ける。

ある解ベクトルが2通り表示があるとすると、

$$
\begin{array}{rrcl}
 & w & = & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \\
-) & w & = & \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_k v_k \\
\hline
 & 0 & = & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k) v_k
\end{array}
$$

$\{v_1, \dots, v_k\}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ $(\lambda_i - \mu_i)$ のどれかは0ではない。

例えば、$\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ なら、

$$
v_1 = -\frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} \left\{ (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k) v_k \right\}
$$

数学類はベクトル空間

解(全体の)空間 Ω は、
ある基底 $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq \Omega$ の線形和で書ける。

↓

$\{v_1+v_2, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ も基底か?

① Ω の元全てをこの線形和で書けるか?

$\longrightarrow$ $1\cdot(v_1+v_2) - 1\cdot v_2 = v_1$ が復元できるだろう

② 1次独立か?

$\lambda_1(v_1+v_2) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ とする。

(目標: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$
$\therefore \{v_1+v_2, v_2, \ldots, v_k\}$ は1次独立.)

$\lambda_1 v_1 + (\lambda_1+\lambda_2)v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$

$\{v_1, \ldots, v_k\}$ が1次独立なので、

$\lambda_1 = \lambda_1+\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$

(目標到達)

第1列に
第2列を
加えたのだと
分かる?

○ p.48 定理2.6

基底が2つあったら、

$\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq \Omega$　基底という集合の元のベクトル1つ1つは基と呼ぶらしい。

$\{u_1, \dots, u_t\} \subseteq \Omega$

$s = t$である(ベクトルの個数は同じである)。

証明

正しくないとする(背理法)。

~~$s > t$~~ とする。

$s < t$　(どっちでもいいけど)

基底の性質を使う。(解集合)$\underbrace{\Omega}_{\text{の元}}$が線形和で書ける。という性質。

$v_1, v_2, \dots, v_s$ を $\{u_1, \dots, u_t\}$ の線形和で書ける。

$u_1, u_2, \dots, u_t$ を $\{v_1, \dots, v_s\}$ 〃

イメージ

$$
{}^\exists a_{ij} \quad \text{s.t.} \quad
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11} v_1 + \cdots + a_{1s} v_s \\
u_i &= a_{i1} v_1 + \cdots + a_{is} v_s \\
&\vdots \\
u_t &= a_{t1} v_1 + \cdots + a_{ts} v_s
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}
$$

$$
{}^\exists b_{ij} \quad \text{s.t.} \quad
\begin{aligned}
v_1 &= b_{11} u_1 + \cdots + b_{1t} u_t \\
v_i & \\
&\vdots \\
v_s &= b_{s1} u_1 + \cdots + b_{st} u_t
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix}
$$

このように代入すると…

ここが成分がベクトルの行列はまだ定義してないが…

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix} = \underset{t\times s\ \text{行列}}{\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{s\times t\ \text{行列}}{\begin{pmatrix} & b_{ij} & \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ t \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{s}{\boxed{a_{ij}}} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \overset{t}{\boxed{\ b_{ij}\ }} \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} s \\ \\ \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & AB & \\ & & \end{pmatrix}}_{t} \Big\} s$$

$\{u_1, \dots, u_t\}$ が $\{u_1, \dots, u_t\}$ の線形和で表わされている。

$\{u_1, \dots, u_t\}$ は1次独立だから、これは単位行列になるはず。

しかし、これは、全て0な行、全て0な列があるから、

いくら基本変形しても単位行列にはならない。

よって矛盾。

仮定 $s \neq t$ がまちがっていた。