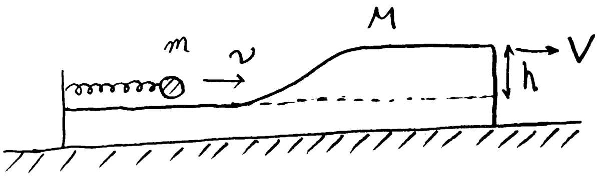
問題 1.10



問1.

$$W = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

問2. 運動量保存より、

$$mv + MV = 0 \quad \text{——— ①}$$

エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{— ②}$$

①, ② より、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Mkx^2}{2(M+m)}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{mkx^2}{2(M+m)}$$

問3. 運動量保存より、

$$mv + MV = 0$$

エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

これらより、

$$v = \sqrt{\frac{M(kx^2 - 2mgh)}{m(M+m)}}, \quad V = \sqrt{\frac{m(kx^2 - 2mgh)}{M(M+m)}}$$

問4. 問3の結果より、(ルートの中は正になるから、)

$$kx^2 - 2mgh \geq 0$$

が必要。

$$x \geq \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

重心位置は動かないから.
球が右に飛び出すということは、
台は左に動いているということ。
$(v > 0,\ V < 0) \longleftarrow$ 問3

内力による運動量保存を見てきたが、
同じような考え方を使って、

5.3. 全角運動量の保存

質点 i の運動方程式を復習

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{F}_{ij}$$

質点 i の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ との外積をとって、
全ての粒子 i の和をとる。

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

(*)

作用・反作用より、$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ である。

同じものを足して $\frac{1}{2}$?

$-\boldsymbol{F}_{ij}$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \right) \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$$

中心力の場合 $\boldsymbol{r}_{ij} \parallel \boldsymbol{F}_{ij}$

$$\therefore \sum_i \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{r}_{ij} \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_{j(\neq i)} \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \right) \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$= 0$$

このとき (*) は、

$$\sum_i \mathbb{r}_i \times m_i \frac{d\mathbb{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i \quad \text{———} (**)$$

ここで

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{r}_i \times m_i \mathbb{v}_i \right)$$

$$= \underbrace{\mathbb{v}_i \times m_i \mathbb{v}_i}_{0} + \mathbb{r}_i \times m_i \frac{d\mathbb{v}_i}{dt}$$

$$= \mathbb{r}_i \times m_i \frac{d\mathbb{v}_i}{dt}$$

よって (**) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \underbrace{\mathbb{r}_i \times m \mathbb{v}_i}_{\text{角運動量}} \right) = \sum_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$$

全角運動量 $\mathbb{L} = \sum_i \mathbb{L}_i = \sum_i \mathbb{r}_i \times m_i \mathbb{v}_i$ と

外力のモーメント $\mathbb{N}_i = \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$ を使うと、

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \sum_i \mathbb{N}$$

↓

全角運動量の時間変化は外力のモーメントの和に等しい。

外力のモーメントの和が 0 なら全角運動量は保存する $\left(\frac{d\mathbb{L}}{dt} = 0 \right)$

重心系での全角運動量

$$\mathbb{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= \sum_i (\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_{ic}) \times m_i (\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_{ic})$$

$$= \boldsymbol{r}_c \times \overbrace{\sum_i m_i}^{M} \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{r}_c \times \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_{ic}}_{0}$$

$$+ \underbrace{\sum m_i \boldsymbol{r}_{ic}}_{0} \times \boldsymbol{v}_c + \sum_i \boldsymbol{r}_{ic} \times m_i \boldsymbol{v}_{ic}$$

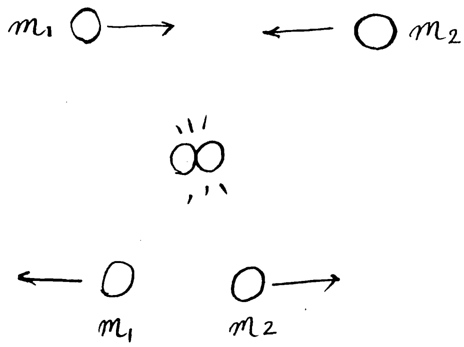
$$= \boldsymbol{r}_c \times M \boldsymbol{v}_c + \sum_i \boldsymbol{r}_{ic} \times m_i \boldsymbol{v}_{ic}$$

$$= \mathbb{L}_C + \mathbb{L}_{NC}$$

↓

全角運動量は、重心の角運動量と
重心周りの角運動量の和。

(例) 5.4 2体衝突



衝突は内力なので、運動量が保存。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

運動エネルギー
(衝突前)

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

全運動量

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{\mu\ (\text{換算質量})} \underbrace{(v_1 - v_2)^2}_{\text{相対速度}}$$

(衝突後)

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1' - v_2')^2$$

全運動量は保存するので、

$$T - T' = \frac{1}{2}\mu\left[(v_1 - v_2)^2 - (v_1' - v_2')^2\right]$$

衝突によって相対運動のエネルギーのみが変化する。

ニュートンの反発の反則

衝突方向
$$\frac{v_{2\parallel}' - v_{1\parallel}'}{v_{1\parallel} - v_{2\parallel}} = e \quad \text{反発係数}$$

衝突に垂直な方向
$$\begin{cases} v_{1\perp} = v_{1\perp}' \\ v_{2\perp} = v_{2\perp}' \end{cases} \quad (\text{剛体の場合})$$

を使って $T - T'$ を書きかえる。

$$T' - T = \frac{1}{2}\mu\,(1-e^2)(v_{1\parallel} - v_{2\parallel})^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2)(v_{1\parallel} - v_{2\parallel})^2$$

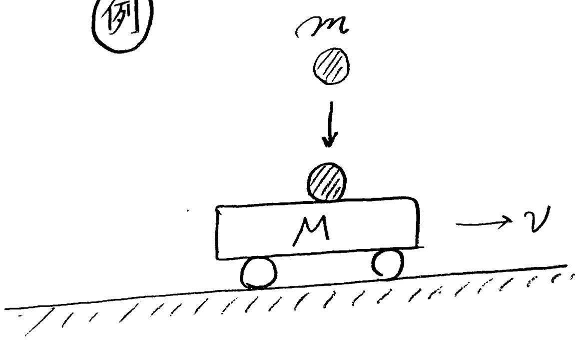
$e = 1 \Rightarrow T = T'$ エネルギー保存

弾性衝突

$e = 0 \Rightarrow T' - T = \frac{1}{2}\mu(v_{1\parallel} - v_{2\parallel})^2$

完全非弾性衝突

例



$e=0$ で m が付着するとき、

$$Mv = (M+m)v'$$

$$\therefore v' = \frac{M}{M+m}v$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= T' - T \\ &= \frac{1}{2}\mu\left(v_{1/\!/} - v_{2/\!/}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v^2\end{aligned}$$