p.45 問題2.4 を使って、
簡約階段行列を使って連立方程式を
解くときかたの説明.

$$\left(\begin{array}{ccccccc:c} 3 & 6 & 1 & 13 & 21 & 2 & 47 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & 14 & 22 & 1 & 39 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 16 & 2 & 40 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 11 & 1 & 24 & 6 \end{array}\right)$$

↓ 簡約階段行列にする。

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 0 & e_1 & 0 & 0 & d_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & e_2 & 0 & 0 & d_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_4 & c_4 \end{array}\right)$$

x_1　x_3　x_5　x_6

プロセスがちがっても
得られる簡約階段行列
は同じになるんだって。

初頭項があるところの
変数をチェック.

↓

4行目　$1x_6 + d_4 x_7 = c_4$

x_7 は $\boxed{\text{任意}}$

$x_6 = c_4 - d_4 x_4$

3行目　$1x_5 + d_3 \underline{x_7} = c_3$

$x_5 = c_3 - d_3 x_7$

2行目　$x_3 + e_2 x_4 + d_2 \underline{x_7} = c_2$

x_4 は $\boxed{\text{任意、}}$

$x_3 = c_2 - e_2 x_4 - d_2 x_7$

初頭項がないところは
任意。

p.46 例題 2.4 から.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 2 \end{cases}$$

別の人が解いて複数解答が得られたとする。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$
$$= (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

これの差をとると何になってるかわかる?

$$(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, a_4-b_4)$$

行列にすると分かりやすい?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}}_{A\text{とする。}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

分配法則で、

$$A\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり、別の解答を見つけたら、差をとって代入すると 0 になると

(イコール0の方程式の解になる)

逆に、$A\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ となる解 (t_1, t_2, t_3, t_4)

をすべてもとめれば、

$A\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ となる解を1つもとめて、

あとは、(t_1, t_2, t_3, t_4) のすべてのパターンの和が解になる。

↓

$A\begin{pmatrix}X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ の解X全体集合は、

その中の元は、和・スカラー倍しても、解の集合に入っている。

(この概念をベクトル空間という。)

次数がすべて同じ式を斉次式という。
せいじしき

- 解なしとは？

  初頭項がない行なのに、定数が出てくる。（定数：0以外）

- 解がちょうど2つある線形連立方程式はある？

  解を2つ見つけたら(α, β)　$A\alpha=b$, $A\beta=b$.

  差をとると、定数が0になる　$A(\alpha-\beta)=0$.

  これは定数倍しても0で、他の解に足して解に…　$A(\alpha+2(\alpha-\beta))=0$

※ 3年生でならう線形代数では解がちょうど2つしかないような連立方程式もある。
(複素数とはちがう別の数を扱うらしい)

○ p.2 へ戻る (線形結合)

A: 行列, X: ベクトル.

$$\Omega = \{ X \mid AX = 0 \}$$

$$\Omega \ni \alpha, \beta \Longrightarrow \alpha + \beta \in \Omega$$

$$\lambda \alpha \in \Omega \quad (\lambda: \text{スカラー})$$

Ω の中からベクトル $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ をもってくると、これの線形結合はすべて Ω に入っている。

↓

すると連立方程式の解は次のように書ける。

$AX = 0$ の解は $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega = \{X \mid AX = 0\}$ の線形結合全体

となるような $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を見つける。

◦ 行列 A のランク(階数)とは、
A を簡約階段行列に変形したときに出てくる初頭項の個数。

↕

簡約階段行列の中の0でない行の個数。

↕

$\underbrace{(A\text{の列の個数}) - (\text{自由に選べる変数の個数})}$
初頭項がない列

これはちゃんとした定義ではない。
後で高等な言葉で定義する。

誰が変形しても初頭項の数は同じになるよ

↓

証明できる?

◦ 証明

A を連立方程式の係数行列だと思って。

$AX = 0$ だったら、

Q が基本変形のとき

$QAX = Q0 = 0$

Q をかけても解の集合はかわらない?

これも解集合によって決まる。

↓

~~これでおわり~~?

初頭項の数だからいいのか。